

**Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія**

**Кафедра Інноваційних технологій управління**

## **Основи сучасних теорій моделювання процесів (ч.1)**

**конспект лекцій для студентів спеціальності  
131- Прикладна механіка другого освітньо-кваліфікаційного рівня**

**Краматорськ 2021**

## Зміст

Вступ.....	5	
<b>Частина 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ</b> .....	7	
<b>Розділ 1. Моделі. Моделювання</b> .....	7	
131.1.....	Основні поняття і визначення .....	7
131.2.....	Цілі і принципи моделювання.....	9
131.3.....	Аксіом и теорії моделювання .....	10
131.4.....	Види моделей і моделювання .....	11
131.5.....	Функції моделей.....	16
131.6.....	Чинник и, що впливають на модель об'єкту .....	16
	Питання для самоконтролю.....	20
<b>Розділ 2. Математичне моделювання</b> .....	21	
2.1. Основні поняття і визначення .....	21	
2.2. Вимоги до математичної моделі .....	23	
2.3. Структура математичної моделі.....	23	
2.4. Класифікація математичних моделей.....	24	
2.5. Цілі математичного моделювання для технічних об'єктів і технологічних процесів.....	26	
	Питання для самоконтролю.....	27
<b>Розділ 3. Алгоритм побудови моделі</b> .....	27	
3.1. Технології моделювання .....	27	
3.2. Алгоритм побудови аналітичної моделі.....	28	
3.3. Алгоритм побудови емпіричної моделі.....	28	
3.4. Коротка характеристика основних етапів алгоритмів побудови аналітичних і емпіричних моделей.....	29	
	Питання для самоконтролю .....	33
<b>Частина 2. ПОБУДОВА ЕМПІРИЧНИХ РЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ</b> ....	34	
<b>Розділ 4. Планування і проведення експерименту</b> .....	34	
4.1. Основні поняття і визначення .....	34	
4.2. Планування експерименту .....	36	
4.2.1. Вибір рівнів чинників.....	36	
4.2.2. Повний факторний експеримент .....	38	
4.3. Проведення експерименту.....	40	
	Питання для самоконтролю .....	41
<b>Розділ 5. Регресійні моделі з однією вхідною змінною</b> .....	41	
5.1. Основні поняття .....	41	
5.2. Адекватність регресійних моделей .....	47	
5.3. Точність регресійних моделей.....	48	
5.4. Види регресійних моделей з однією вхідною змінною .....	50	

Питання для самоконтролю .....	50
<b>Розділ 6. Регресійні моделі з декількома вхідними змінними .....</b>	<b>51</b>
6.1. Багатофакторна (множинна) лінійна регресія .....	51
6.2. Матричний підхід до визначення коефіцієнтів регресії.....	52
6.3. Оцінка адекватності і точності багатофакторної лінійної моделі	54
6.4. Лінійні регресійні моделі з декількома вхідними змінними .....	55
6.5. Нелінійні регресійні моделі з декількома вхідними змінними .....	55
6.6. Крокові методи побудови регресійних моделей .....	57
Питання для самоконтролю .....	59
<b>Розділ 7. Інтерпретація і оптимізація регресійних моделей .....</b>	<b>60</b>
7.1. Інтерпретація моделі.....	60
7.2. Оптимізація моделі .....	61
Питання для самоконтролю .....	62
Висновок.....	63
Список літератури.....	64

## Вступ

П'ятдесят років тому слова «*модель*», «*моделювання*» були відомі тільки дуже вузькому колу високопрофесійних фахівців, зв'язаних або з дослідженням складних фізичних і природних процесів і явищ, або із створенням складних технічних об'єктів (в основному, як правило, військового призначення). Сьогодні слова «*модель*» і «*моделювання*» відомі навіть школярам, використовуються в звичайному житті і вже не сприймаються як вузькоспеціальні терміни. Комп'ютерні інформаційні технології розширили можливості моделювання, і сьогодні важко представити науково-дослідну і серйозну проектну діяльність без використання методології і сучасних засобів побудови і використання моделей. Можна констатувати, що за останні десятиліття моделювання оформилося в самостійну міждисциплінарну область знань зі своїми об'єктами, закономірностями, підходами і методами дослідження і відноситься до загальних методів наукового пізнання.

Технологія машинобудування як наука займається вивченням закономірностей, що діють в процесі виготовлення машин, в цілях використання цих закономірностей для забезпечення необхідної якості машин, заданої їх кількості при найменшій собівартості [1]. Проектування технологічних процесів збірки виробів і обробки компонентів виробів є найважливішим завданням технологічної підготовки машинобудівного виробництва, вирішити яку дозволяє використання моделей (перш за все математичних) і моделювання. Дані лекції дозволяють студентам отримати знання і уявлення про основи і методологію моделювання, про побудову і застосування моделей в технологічних процесах машинобудування.

Для успішного освоєння даного курсу студентам необхідно мати теоретичні знання і практичні навички по наступних дисциплінах: «Вища математика», «Інформатика», «Теорія різання металів», «Технологія машинобудування».

Результатом вивчення курсу «Моделювання технологічних процесів» повинне стати засвоєння студентами основних понять і визначень теорії моделювання, класифікацій моделей і видів моделювання, особливостей застосування різних моделей і математичного моделювання, алгоритмів побудови моделей, основ побудови і дослідження однофакторних і багатфакторних регресійних моделей.

## Частина 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ

### Розділ 1. Моделі. Моделювання

#### 1.1. Основні поняття і визначення

Термін «*модель*» (від латів. *modulus* – міра, зразок, норма) увійшов до математики в ХІХ ст. у зв'язку з розвитком неевклідової геометрії.

Сьогодні в літературі можна зустріти безліч визначень поняття «*модель*». Приведемо лише деякі з них.

Під *моделлю* розуміють такий матеріальний або такий, що в думках представляється об'єкт, який в процесі пізнання (вивчення) заміщає об'єкт-оригінал, зберігаючи деякі важливі для даного дослідження типові його риси [2].

*Модель* – це спрощене, можна сказати «упаковане» знання, що несе цілком певну обмежену інформацію про предмет (явищі), відображає ті або інші його властивості [2].

*Модель* – об'єкт-заступник об'єкту-оригіналу, що забезпечує вивчення деяких властивостей оригіналу [3].

*Модель* – що реально існує або в думках представляється система, яка, заміщаючи і відображаючи оригінал з певною метою, знаходиться з ним у відносинах подібності (схожість) [4].

Аналіз досвіду використання моделей в природних, технічних і гуманітарних науках дозволяє зробити вивід, що модель – це наше уявлення про досліджуваний об'єкт, своєрідна форма кодування інформації про об'єкт.

Таким чином, можна сказати, що *модель* – це об'єкт будь-якої природи, який при дослідженні здатний заміщати реально існуючий об'єкт з метою отримання нової інформації про останній. Це визначення і приймемо за основне в рамках даної роботи.

З моделями ми стикаємося ще в дитинстві, граючи машинками, будиночками, ляльками, які є зменшеними копіями (моделі) реально існуючих об'єктів. У кухлі технічної творчості дитина вчиться створювати моделі технічних об'єктів. У школі практично все навчання здійснюється із застосуванням моделей. Підростаючи, ми звикаємо використовувати уявні образи-моделі ситуацій для про-гнозування результатів своєї діяльності. Без перебільшення можна сказати, що в своєму усвідомленому житті чоловік має справу виключно з моделями тих або інших реальних об'єктів, процесів, явищ.

Окрім поняття «*модель*» в моделюванні є ще ряд важливих понять.

*Об'єкт* (від латів. *objectum* – предмет) – все, на що направлена людська діяльність [3]. Будь-який об'єкт дослідження є нескінченно складним і характеризується нескінченним числом станів і параметрів.

*Процес* – певна сукупність дій, направлених на досягнення поставленої мети.

*Система* – цілеспрямована безліч об'єктів будь-якої природи [3].

Таким чином, можна сказати, що *система* – це сукупність взаємозв'язаних елементів і компонентів, що має цілком конкретну структуру і

цілком конкретне цільове призначення.

*Елемент системи* – частина системи, що не піддається подальшому діленню.

*Зовнішнє (що оточує) середовище* – безліч елементів будь-якої природи, що існують поза системою (об'єкту), роблять вплив на систему (об'єкт) або знаходяться під її (його) дією [3].

*Гіпотеза* (від гр. *hypothesis* – підстава, припущення) – певні прогнози, гадані думки про причинно-наслідкові зв'язки явищ, засновані на деякій кількості досвідчених даних, спостережень, припущень [2].

*Аналогія* (від гр. *analogia* – відповідність, відповідність) – уявлення про яку-небудь приватну схожість двох об'єктів (істотному або неістотному) [2].

Кажучи про модель, не можна не сказати про моделювання.

*Моделювання* – заміщення досліджуваного об'єкту (оригіналу) його умовним чином, описом або іншим об'єктом (моделлю) і пізнання властивостей оригіналу шляхом дослідження властивостей моделі [5].

*Моделювання* – метод пізнання навколишнього світу, який можна віднести до загальнонаукових методів, вживаних як на емпіричному, так і на теоретичному рівні пізнання [2].

*Моделювання* – заміщення одного об'єкту іншим з метою отримання інформації про найважливіші властивості об'єкту-оригіналу за допомогою об'єкту-моделі [3].

Таким чином, можна вважати, що *моделювання* – це побудова (або вибір з що вже існують) моделі, її вивчення і використання з метою отримання нових знань про досліджуваний об'єкт. Прийmemo це визначення як базового.

## **1.2. Цілі і принципи моделювання**

Створюючи модель об'єкту, дослідник пізнає об'єкт, тобто виділяє його з навколишнього середовища і будує його формальний опис. Основні *цілі моделювання*:

- опис об'єкту ;
- пояснення об'єкту ;
- прогнозування поведінки і властивостей об'єкту. Меті опису і пояснення об'єкту можна об'єднати в одну –

вивчення об'єкту (пізнавальна мета). Модель потрібна для того, щоб зрозуміти, як влаштований конкретний досліджуваний об'єкт, які його структура, внутрішні зв'язки, основні властивості, закони розвитку, саморозвитку і взаємодії з навколишнім середовищем [2]. Ще одна мета (прогнозування поведінки і властивостей об'єкту) є частиною стратегічної мети – управляти об'єктом, визначаючи по моделі оптимальні дії, що управляють, при заданих цілях і критеріях. Модель потрібна і для того, щоб прогнозувати наслідки різних дій на об'єкт.

У основі моделювання лежить *теорія подібності*, згідно якої абсолютна подібність можлива тільки при заміні одного об'єкту іншим таким самим. Цю ідею добре виразили А. Розенблют і Н. Вінер, коли сказали, що кращою

моделлю kota є інший кіт, а ще краще – той же самий кіт [2]. При моделюванні абсолютна подібність не має місця. Будь-яка модель не тотожна об'єкту-оригіналу і не є повною, оскільки при її побудові дослідник враховував тільки ті особливості об'єкту, які вважав найбільш важливими для вирішення конкретного завдання. Достатньо того, щоб модель добре відображала властивості, що цікавлять дослідника, і прояви аналізованого об'єкту. Проте ніхто і ніщо не може бути моделлю самого себе.

Реальна користь від моделювання може бути отримана при виконанні наступних умов:

- модель повинна бути адекватною оригіналу в тому сенсі, що повинна з достатньою точністю відображати характеристики оригіналу, що цікавлять дослідника;

- модель повинна усувати проблеми, пов'язані з фізичними вимірюваннями якихось сигналів або характеристик оригіналу.

Моделювання базується на декількох основоположних принципах [5]:

1. *Принцип інформаційної достатності* – при повній відсутності інформації про об'єкт побудова його моделі неможлива. Існує деякий рівень апріорної інформації про об'єкт, тільки досягши якого може бути побудована адекватна модель. За наявності повної інформації про об'єкт побудова його моделі не має сенсу.

2. *Принцип здійсненності* – створювана модель повинна забезпечувати досягнення поставленої мети дослідження з вірогідністю, що істотно відрізняється від нуля.

3. *Принцип множинності моделей* – створювана модель повинна відображати в першу чергу ті властивості реального об'єкту (системи), які цікавлять дослідника. Для повного дослідження об'єкту необхідна достатньо велика кількість моделей, що відображають досліджуваний об'єкт з різних сторін і з різним ступенем деталізації.

4. *Принцип агрегування* – в більшості досліджень систему доцільно представити як сукупність підсистем, для опису яких виявляються придатними стандартні схеми.

5. *Принцип параметризації* – модель будується у вигляді відомої системи, параметри якої невідомі.

### **1.3. Аксиоми теорії моделювання**

Раніше було вже сказано, що моделювання сьогодні є самостійною областю знань, окремою наукою. Багато наук базуються на деякому наборі аксіом (тверджень, які приймаються «на віру» і не вимагають доказів). Є такі аксіоми і в моделюванні [5].

*Аксиома 1.* Модель не існує сама по собі, а виступає в тандемі з деяким матеріальним об'єктом, який вона представляє (заміщає) в процесі його вивчення або проектування.

*Аксиома 2.* Для природних матеріальних об'єктів модель вторинна, тобто з'являється як наслідок вивчення і опису цього об'єкту (наприклад, модель сонячної системи). Для штучних матеріальних об'єктів (створюваних людиною

або технікою) модель первинна, оскільки передує появі самого об'єкту (наприклад, модель літака, модель двигуна).

*Аксиома 3.* Модель завжди простіша за об'єкт. Вона відображає тільки деякі його властивості, а не представляє об'єкт «у всій пишності». Для одного об'єкту будується цілий ряд моделей, що відображають його поведінку або властивості з різних сторін або з різним ступенем детальності. При нескінченному підвищенні якості моделі вона наближається до самого об'єкту.

*Аксиома 4.* Модель повинна бути подібна до того об'єкту, який вона заміщає, тобто модель в певному значенні є копією, аналогом об'єкту. Якщо в досліджуваних ситуаціях модель поводить себе так само, як і модельований об'єкт, або ця розбіжність невелика і влаштовує дослідника, то говорять, що модель адекватна *оригіналу*. Адекватність – це відтворення моделлю з необхідною повнотою і точністю всіх властивостей об'єкту, істотних для цілей даного дослідження.

*Аксиома 5.* Побудова моделі не самоціль. Вона будується для того, щоб можна було експериментувати не з самим об'єктом, а із зручнішим для цих цілей його представником, званим моделлю.

#### **1.4. Види моделей і моделювання**

Єдиної загальноприйнятої класифікації моделей і моделювання на сьогоднішній день не існує. Дана допомога розроблена для студентів спеціальності «Професійне навчання» і враховує інтегративність їх професійної підготовки – педагогічну і технічну компоненти. Тому ми спиратимемося на два якнайповніших і зрозуміліших педагогам професійного навчання підходу до класифікації моделей і моделювання [2, 3].

Моделі характеризуються трьома основними ознаками [4]:

- приналежністю до певного класу завдань (наприклад, управління технологічними процесами, управління технічними об'єктами, планово-економічні завдання і т. д.);
- приналежністю до певного класу об'єктів (фізичні, біологічні і т. д.);
- способом реалізації.

За способом реалізації моделі підрозділяються на матеріальних і ідеальних [2, 4]. До цього умовного ділення приводить використання моделювання на теоретичному і емпіричному рівнях пізнання.

*Матеріальне моделювання* – це моделювання, при якому дослідження об'єкту виконується з використанням його матеріального ана-11 балки, відтворюючої основні фізичні, геометричні, динамічні, функціональні характеристики об'єкту [2].

*Ідеальне моделювання* відрізняється від матеріального тим, що засноване не на матеріальній аналогії об'єкту і моделі, а на аналогії ідеальною, мислеобразною і завжди носить теоретичний характер. Ідеальне моделювання є первинним по відношенню до матеріального.

Матеріальні моделі об'єднуються в три основні підкласи [4]:

- геометрично подібні, відтворюючі просторово геометричні характеристики оригіналу (макети будівель, муляжі і т. д.);



- відтворюючі з масштабуванням в просторі і в часі властивості оригіналу тієї ж природи, що і модель (наприклад, моделі судів);
- відтворюючі властивості оригіналу в моделюючому об'єкті іншої природи (наприклад, електрогідравлічні аналогії) або засновані на ізоморфізмі між формально описаними властивостями оригіналу і об'єкту (всі різновиди електронного моделювання).

Існує два основні різновиди *матеріального* моделювання: *натурне* і *аналогове* моделювання. Обидва види засновано на властивостях геометричної або фізичної подібності. Теорія подібності якраз і займається вивченням умов подібності явищ.

*Натурне* – це таке моделювання, при якому реальному об'єкту ставиться у відповідність його збільшений або зменшений аналог, що допускає дослідження (у лабораторних умовах) за допомогою подальшого перенесення властивостей процесів, що вивчаються, і об'єктів на об'єкт на основі теорії подібності [1]. Прикладами натурних моделей є макети будівель, ландшафтів, судів, літаків і так далі В середині XIX ст. з натурних моделей моделювання почало розвиватися як наукова дисципліна, а самі моделі почали активно використовуватися при проектуванні нових технічних пристроїв.

*Аналогове* – це моделювання, засноване на аналогії процесів і явищ, що мають різну фізичну природу, але однаково описуваних формально [1]. У основу аналогового моделювання покладений збіг математичних описів різних об'єктів. Прикладами аналогових моделей можуть служити електричні і механічні коливання, які з погляду математики описуються абсолютно однаково, але відносяться до фізичних процесів, що якісно відрізняються.

*Ідеальне* моделювання розділяють на два основні типи: *інтуїтивне* і *наукове* моделювання [2].

*Інтуїтивне* – моделювання, засноване на інтуїтивному (не обгрунтованому з позицій формальної логіки) уявленні про об'єкт дослідження, непіддатливий формалізації або що не потребує її [2]. Прикладом інтуїтивної моделі навколишнього світу можна вважати життєвий досвід будь-якої людини, його вміння і знання, отримані від предків. Роль інтуїтивних моделей в науці надзвичайно висока.

*Наукове* – це завжди логічно обгрунтоване моделювання, що використовує мінімальне число припущень, прийнятих як гіпотези на підставі спостереження за об'єктом моделювання [2]. Головна відмінність наукового моделювання від інтуїтивного полягає не тільки в умінні виконувати необхідні операції і дії власне моделюванню, але і в знанні «внутрішніх» механізмів, які використовуються при цьому.

*Знаковим* називають моделювання, що використовує як моделі знакові зображення якого-небудь вигляду: схеми, графіки, креслення, набори символів і так далі Прикладами таких моделей є мови спілкування, алгоритмічні мови, ноти для запису музичних творів, математичні формули і так далі Знакова форма використовується для передачі як наукового, так і інтуїтивного знання.

Уявний образ реального об'єкту, що склався в голові дослідника, в науковій літературі називається *когнітивною* моделлю. Створюючи таку

модель, дослідник часто спрощує об'єкт, щоб отримати лаконічніший і компактніший опис. Представлення когнітивної моделі на природній мові називається *змістовною моделлю*. У природно-научних дисциплінах і техніці змістовну модель часто називають *технічною постановкою проблеми*.

За функціональною ознакою і цілями змістовні моделі діляться на *описові, пояснювальні, прогностичні*.

*Описова* модель – це будь-який опис об'єкту.

*Пояснювальна* модель відповідає на питання, чому що-небудь відбувається.

*Прогностична* модель повинна передбачати поведінку об'єкту.

*Концептуальною* моделлю називається змістовна модель, при формулюванні якої використовуються поняття і представлення наочних областей знань, що займаються вивченням об'єкту моделювання.

Концептуальні моделі бувають *логіко-семантичними, структурно-функціональними і причинно-наслідковими*.

*Логіко-семантична* модель є описом об'єкту в термінах і визначеннях відповідних наочних областей знань, що включає всі відомі логічно несуперечливі твердження і факти.

При побудові *структурно-функціональної* моделі об'єкт зазвичай розглядається як цілісна система, яку розчленовують на окремі підсистеми, зв'язані структурними відносинами. Для представлення подібних моделей найчастіше застосовують схеми, діаграми, карти.

*Причинно-наслідкова* модель часто використовується для пояснення і прогнозування поведінки об'єкту і буває орієнтована, перш за все, на виявлення головних взаємозв'язків між складовими елементами об'єкту, що вивчається, визначення впливу зміни яких-небудь чинників на стан компонентів моделі і на розуміння того, як в цілому функціонуватиме модель і чи буде вона адекватно описувати динаміку параметрів об'єкту, що цікавлять дослідника.

*Формальна* модель є представленням концептуальної моделі за допомогою формальних або алгоритмічних мов. До формальних відносяться *математичні і інформаційні* моделі.

Із загальнонаукової точки зору *математичне* моделювання – це ідеальне наукове знакове формальне моделювання, при якому опис об'єкту здійснюється на мові математики, а дослідження моделі проводиться з використанням тих або інших математичних методів.

З розвитком обчислювальної техніки стали популярні *інформаційні* моделі, що представляють, по суті, автоматизовані довідники, реалізовані за допомогою систем управління базами даних. Такі моделі дозволяють знайти в базі даних інформацію за запитом і не можуть генерувати нове знання, відсутнє в базі даних. В той же час використання інформаційних моделей у поєднанні з вельми простими математичними моделями (наприклад, із застосуванням регресійного аналізу) може привести до відкриття нових закономірностей.

У роботах по моделюванню технічних систем *матеріальне* моделювання називають *реальним* і конкретизують інакше [3]. Видами реального моделювання технічних систем і процесів є *натурне і фізичне* моделювання. До

*натурного* моделювання відносять науковий експеримент, комплексні випробування, виробничий експеримент. До *фізичного* моделювання – моделювання в реальному масштабі часу, моделювання в нереальному (зміненому) масштабі часу. При реальному моделюванні дослідження можуть виконуватися на самому об'єкті, на його частині або на його моделі.

Моделювання може бути і *уявним*. При уявному моделюванні дослідження проводяться на мислеобразних конструкціях. Уявне моделювання ділиться на *наочне, символічне і математичне*.

При *наочному* моделюванні на базі уявлень людини про реальні об'єкти створюються різні наочні моделі, що відображають явища і процеси, що протікають в об'єкті. Видами наочного моделювання є *гіпотетичне і аналогове* моделювання і *макетування*.

У основі *гіпотетичного* моделювання лежить якась гіпотеза про закономірності протікання процесу в реальному об'єкті, яка відображає рівень знань дослідника про об'єкт і базується на причинно-наслідкових зв'язках між входом і виходом об'єкту, що вивчається. *Гіпотетичне моделювання* використовується в тих випадках, коли знань про об'єкт недостатньо для побудови формальних моделей (наприклад, представлення об'єкту досліджень у вигляді «чорного ящика»).

*Аналогове* моделювання ґрунтується на аналогіях різних рівнів. Найвищим рівнем є повна аналогія, що має місце тільки для достатньо простих об'єктів (наприклад, креслення, схема, графік, план, опис якого-небудь явища, процесу або предмету).

*Уявне макетування* застосовується в тих випадках, коли процеси, що протікають в реальному об'єкті, не піддаються фізичному моделюванню. Уявне макетування може передувати іншим видам моделювання.

*Символічним* моделюванням є штучний процес створення логічного об'єкту, який заміщає реальний і виражає основні властивості його відносин за допомогою певної системи знаків, що відображають набір понять (*знакове* моделювання), і символів із спеціального словника, очищеного від неоднозначності (*мовне* моделювання) (приклад знакової моделі – дорожні знаки, мовний – модель словотворення).

Математичне моделювання буде розглянуто нами окремо і детально далі.

Моделювання може бути *статичним і динамічним* [3]. *Статичним* називається моделювання, при якому серед параметрів об'єкта і моделі відсутній час і самі параметри об'єкту з часом не змінюються. При *динамічному моделюванні* об'єкт дослідження і його параметри в часі істотно змінюються.

Моделювання може бути *детермінованим і стохастичним*. *Детерміноване* моделювання відображає детерміновані процеси, тобто процеси, в яких передбачається відсутність всяких випадкових дій; *стохастичне моделювання* відображає імовірнісні процеси і події.

Моделювання може бути *дискретним і безперервним*. Модель дискретна, якщо вона описує поведінку системи тільки в дискретні моменти часу. Модель безперервна, якщо вона описує поведінку системи для всіх моментів часу з

деякого проміжку часу. Можливі комбіновані варіанти.

Нарешті, моделювання може бути *повним*, *неповним* і *наближеним*.

*Повним* називається моделювання, при якому досягається повна подібність досліджуваного об'єкту і моделі в часі і в просторі.

*Неповним* називається моделювання, при якому реалізується неповна подібність досліджуваного об'єкту і моделі в часі і в просторі.

*Наближеним* називається моделювання, при якому деякі прояви досліджуваного об'єкту не моделюються зовсім.

### **1.5. Функції моделей**

Прийнято виділяти наступні функції моделей [7]:

- модель – засіб осмислення дійсності;
- модель – засіб спілкування;
- модель – засіб навчання і тренування;
- модель – засіб постановки експерименту (комп'ютерний експеримент).

### **1.6. Чинники, що впливають на модель об'єкту**

З викладеного вище зрозуміло, що для будь-якого об'єкту можна побудувати безліч моделей. Від чого залежить «характер» моделі об'єкту? В першу чергу, від наступних чинників:

- 1) від об'єкту дослідження (кого або що досліджуємо);
- 2) проблеми і завдання дослідження (що хочемо дізнатися про об'єкт);
- 3) апріорній інформації про об'єкт (що вже знаємо про об'єкт дослідження);
- 4) суб'єкта дослідження (хто досліджує об'єкт);
- 5) від мови опису об'єкту (як досліджуємо і описуємо об'єкт).

#### **1. Об'єкт дослідження**

*Об'єкт дослідження* (від латів. *objectum* – предмет) – все те, на що направлена людська діяльність. Для моделювання і дослідження об'єкту необхідно виділити його з навколишнього зовнішнього світу, а також виявити всі дії на об'єкт з боку інших навколишніх об'єктів і реакцію досліджуваного об'єкту на ці дії.

Кожен об'єкт до початку дослідження має свою структуру, свої властивості і характеристики. У теорії моделювання дія з боку навколишнього світу на об'єкт при його дослідженні називають вхідною *дією* і представляють у вигляді вхідних *чинників* (у математичних моделях їх називають вхідними змінними).

Поведінка об'єкту і його прояви на навколишньому світі, що виникають від зовнішньої дії, називають *відгуком об'єкту* і представляють у вигляді *вихідних чинників* (у математичних моделях – вихідних змінних).

Зовнішня дія на об'єкт можна розділити на *те, що управляє* і *обурює*. Під *тим, що обурює* зазвичай розуміють дію на об'єкт з боку навколишнього середовища, параметри і закономірності якого випадковим чином змінюються в часі і недоступні для вимірювання, контролю і тим більше зміни у момент безпосереднього дослідження об'єкту. Під керівникам *зазвичай* розуміють

цілеспрямовану дію на досліджуваний об'єкт, параметри і закономірності якого можуть бути зміряні, проконтрольовані і змінені за бажанням суб'єкта у момент безпосереднього дослідження об'єкту.

Параметри *властивостей* і *структури* об'єкту можуть бути відомі (або визначені) на момент початку дослідження об'єкту і надалі змінюватися під зовнішньою дією, будучи об'єктами вивчення.

Раніше було використано поняття «чинник». У моделюванні *чинник* – деяка змінна величина, що приймає в кожен момент часу деяке певне значення зі своєї області визначення і що відображає зовнішню дію на об'єкт або його відгук на цю дію.

Тоді *вхідними чинниками* можна вважати властивості і структуру об'єкту до початку дослідження, а також дія, що управляє і обурює, на об'єкт в процесі його дослідження; *вихідними чинниками* – властивості, структуру, поведінку об'єкту, що змінилися під впливом вхідних чинників.

Всі об'єкти мають наступні характеристики:

- *складність* – визначається кількістю станів, в яких може знаходитися об'єкт (по цьому параметру розрізняють прості об'єкти, складні об'єкти і великі системи);

- *керуваність* – здатність об'єкту переходити з одного стану в інше під дією ззовні і знаходитися в цьому стані із заданою точністю заданий проміжок часу;

- *ступінь відтворюваності результатів* – якщо спостерігати об'єкт в одному і тому ж стані в різні моменти часу, то різниця в спостереженнях не повинна перевищувати деякого заданого значення (точність вимірювання).

## 2. Проблема і завдання дослідження

У моделюванні розрізняють поняття «*проблема*» і «*завдання*».

*Проблема* – різновид питання, що має чітко поставлену мету, але шляхи досягнення цієї мети в даний момент часу можуть бути невідомі.

*Завдання* – різновид питання, що має чітко поставлену мету і відомі шляхи досягнення цієї мети.

Розглянемо класифікації завдань.

### 1. З поставленого питання:

- прями завдання (відповідають на питання: «Якими будуть поведінка і прояви досліджуваного об'єкту, якщо відомі зовнішня дія, структура і властивості об'єкту?»);

- зворотні завдання (відповідають на питання: «Якими повинні бути структура і властивості об'єкту, якщо при відомій зовнішній дії відомі поведінка і прояви об'єкту?» і «Якою повинна бути зовнішня дія на об'єкт, якщо відомі структура і властивості об'єкту, поведінка і прояви об'єкту?»).

### 2. По кількості кроків рішення:

- однокрокові (дуже прості) завдання;
- багатокрокові завдання.

### 3. За умовами:

- детерміновані завдання;
- стохастичні завдання.

4. По кількості вихідних змінних (чинників):

- однокритеріальні завдання;
- багатокритерійні завдання. 3. *Апріорна інформація про об'єкт*  
*Інформація* (від латів. information – роз'яснення, виклад) включає у себе які-небудь відомості і є об'єктом інформаційних технологій.

Розрізняють два види інформації: *знання* і *дані*.

*Знання* – інформація, на підставі якої реалізується процес логічного виводу (філософське знання про життєдіяльність людини).

*Дані* – інформація, представлена у формалізованому вигляді, придатному для обробки автоматичними засобами при можливій участі людини (як правило, дані – це зареєстровані сигнали).

Можна сказати, що *інформація* – це продукт взаємодії даних і адекватних методів їх перетворення [6].

Виділяють наступні особливості інформації:

- динамічний характер (інформація міняється і існує тільки у момент взаємодії даних і методів; інформація існує тільки у момент протікання інформаційних процесів; решту всього часу інформація існує тільки у вигляді даних);
- діалектичний характер взаємодії даних і методів (інформація виникає і існує у момент взаємодії об'єктивних даних і суб'єктивних методів).

Розглянемо класифікації інформації.

1. По області отримання і використання:

- наукова (логічна) інформація – фізична, біологічна, хімічна і ін. (тобто що об'єктивно існує);
- технічна інформація – конструкторська, технологічна, планово-економічна, управлінська (тобто створена людиною).

2. За призначенням:

- масова інформація;
- спеціальна інформація.

3. За формою зберігання і типу носія:

- інформація, представлена в машинному (цифровому) вигляді;
- інформація, представлена у вигляді документа (на паперовому або іншому подібному носіїві).

Найбільш важливими властивостями інформації вважаються [6]:

- об'єктивність і суб'єктивність;
- повнота;
- достовірність;
- адекватність;
- доступність;
- актуальність. У моделюванні ці властивості можна розглядати як вимоги

до апріорної інформації.

4. *Суб'єкт дослідження (моделювання)*

Абсолютно очевидно, що суб'єктом моделювання є тільки человек1.

5. *Мова опису об'єкту*

Мова опису об'єкту відповідає виду моделювання, який вибирається дослідником (суб'єктом моделювання).

### **Питання для самоконтролю**

1. Що таке модель?
2. Що таке об'єкт?
3. Що таке процес?
4. Що таке система?
5. Що таке елемент системи?
6. Що таке навколишнє середовище?
7. Що таке гіпотеза?
8. Що таке аналогія?
9. Що таке моделювання?
10. Позначте цілі моделювання.
11. Назвіть принципи моделювання.
12. Перерахуйте аксіоми моделювання.
13. Які види моделей існують?
14. Які види моделювання існують?
15. Що таке матеріальне моделювання?
16. Що таке уявне моделювання?
17. Які функції виконують моделі?
18. Від чого залежить модель об'єкту?
19. Що таке чинник, рівень чинника?
20. Що таке складність об'єкту?
21. Що таке завдання?
22. Що таке проблема?
23. Що таке інформація? Назвіть види інформації.

## Розділ 2. Математичне моделювання

### 23.1. Основні поняття і визначення

Із загальних позицій математичне моделювання можна розглядати як один з методів пізнання реального світу в період формування так званого інформаційного суспільства [7]. Центральне поняття даної теми – поняття математичної моделі, яке, як і ряд інших понять математичного моделювання, не має строгого формального визначення [7, 8]. У літературі по моделюванню пропонуються наступні варіанти:

- під *математичною моделлю* розуміється клас абстрактних і символічних математичних об'єктів – таких, як числа і вектора, і відношення між ними [9];

- *математичною моделлю* об'єкту називають сукупність абстрактних основоположних математичних понять і відносин, що виражених за допомогою системи математичних символів і позначень і відображають деякі властивості об'єкту, що вивчається [8];

- під *математичною моделлю* розуміється будь-який оператор  $A$ , що дозволяє по відповідних значеннях вхідних параметрів  $X$  встановити вихідні значення параметрів  $Y$  об'єкту моделювання [2].

Таким чином, *математична модель* – сукупність математичних об'єктів (рівнянь, систем рівнянь і нерівностей, алгебраїчних виразів і т. д.), математичних символів, що описують мовою, досліджуваній об'єкт і його відносини з навколишнім світом. Це визначення ми і прийнемо за базове в даній роботі.

Під *математичним моделюванням* розумітимемо процес встановлення відповідності даному реальному об'єкту деякого математичного об'єкту, званого математичною моделлю, і дослідження цієї моделі, що дозволяє отримувати характеристики даного реального об'єкту [3].

Особливість *математичного моделювання* полягає в тому, що абстрактним віддзеркаленням існуючого або створюваного об'єкту є його математична модель, кількісний аналіз якої дозволяє отримати нові знання про цей об'єкт [7, 8].

Під *математичним моделюванням* в техніці розуміють адекватну заміну досліджуваного технічного пристрою або процесу відповідною математичною моделлю і її подальше вивчення методами обчислювальної математики із залученням засобів сучасної обчислювальної техніки [8].

Тобто *математичне моделювання* – це побудова математичної моделі (або вибір наявної «моделі-заготівки»), її дослідження з метою отримання нової інформації про об'єкт і використання для опису властивостей і прогнозу поведінки об'єкту.

Математичне моделювання засноване на тому факті, що різні об'єкти і явища можуть мати однаковий математичний опис. Кажучи звичною мовою, *математична модель* – це сукупність наших знань про досліджуваній об'єкт,



сформульованих на мові математики.

Проте слід пам'ятати, що наші знання про досліджуваний об'єкт ніколи не бувають абсолютними. Отже, математична модель, як і будь-яка інша модель, завжди є тільки копією об'єкту і описує його приблизно.

Можна назвати наступні переваги математичного моделювання в порівнянні з натурним експериментом [2]:

- економічність (заощадження матеріальних, людських, тимчасових і фінансових ресурсів);
- можливість моделювання гіпотетичних об'єктів;
- можливість реалізації режимів, небезпечних або трудноспроизводимых в реальності;
- можливість зміни масштабу часу;
- простота багатоаспектного аналізу;
- можливість побудови прогнозів на основі виявлення загальних закономірностей;
- наявність і універсальність технічного і програмного забезпечення для моделювання.

### **23.2. Вимоги до математичної моделі**

Створення математичних моделей є головним напрямом сучасного процесу математизації наук (природних, технічних, гуманітарних). Вище було сказано, що для будь-якого об'єкту можна побудувати безліч моделей, у тому числі і математичних. Щоб математичну модель можна було використовувати для дослідження реального об'єкту, вона повинна задовольняти наступним вимогам [4]:

- бути практично корисною;
- бути адекватною реальному об'єкту;
- бути адекватною вирішуваним завданням.

Аналіз використання моделювання численними дослідниками дозволяє говорити про те, що математична модель також повинна відповідати наступним вимогам:

- бути простій в змістовному сенсі і що легко інтерпретується;
- бути «адаптованою» до наявних початкових даних про об'єкт і легко модифікуватися при появі нових даних;
- бути повною з погляду вирішуваних завдань;
- бути орієнтованою на психологію користувача, простій і зрозумілою йому;
- гарантувати відсутність абсурдних результатів.

### **23.3. Структура математичної моделі**

Математична модель є комбінацією наступних елементів:

- змінних (вхідних і вихідних) – завжди мають область визначення;
- параметрів – приймають числові значення;
- функціональних залежностей;
- обмежень (штучних і природних);

- цільових функцій (у завданнях оптимізації).

### **23.4. Класифікація математичних моделей**

Аналіз літературних джерел по моделюванню дозволяє класифікувати математичні моделі по наступних ознаках [2]:

1. Складність об'єкту моделювання.
2. Оператор моделювання (подмодель).
3. Вхідні і вихідні параметри моделі.
4. Цілі моделювання.
5. Метод реалізації моделі.

#### *1. Складність об'єкту*

Всі об'єкти моделювання можна розділити на дві групи: прості об'єкти і об'єкти-системи. При моделюванні простих об'єктів не розглядається внутрішньо будова об'єкту, не виділяються складові його елементи або підпроцеси. Простим об'єктом, наприклад, є матеріальна крапка в класичній механіці. Для складних систем характерна наявність великого числа взаємозв'язаних і взаємодіючих елементів. Їх поведінка багатоваріантна. При моделюванні об'єктів-систем виникають великі труднощі. Моделі об'єктів-систем, що враховують властивості і поведінку окремих елементів, а також взаємозв'язки між ними, називаються *структурними* моделями.

#### *2. Оператор моделі*

Оператор моделі визначається сукупністю рівнянь. Якщо оператор забезпечує лінійну залежність вихідних чинників від вхідних, то математична модель називається *лінійною*. Інакше модель називається *нелінійною*.

#### *3. Параметри моделі*

Залежно від виду використовуваної безлічі параметрів моделі діляться на *якісних* і *кількісних*, *дискретних* і *безперервних*, *змішаних*.

#### *4. Цілі моделювання*

Залежно від мети моделювання виділяють *дискриптивні* *оптимізаційні*, *управлінські* моделі.

Метою *дискриптивних* моделей є встановлення законів зміни параметрів моделі. *Оптимізаційні* моделі призначені для визначення оптимальних (якнайкращих) з погляду деякого критерію параметрів об'єкту і технологічних режимів. *Управлінські* моделі застосовуються для ухвалення ефективних управлінських рішень.

#### *5. Метод реалізації моделі*

Залежно від методу реалізації виділяють *аналітичні* і *алгоритмічні* математичні моделі. Метод є *аналітичним*, якщо він дозволяє отримати вихідні чинники у вигляді аналітичних виразів. Аналітичні методи бувають *алгеброю* і *наближеними*. У *алгоритмічних* моделях математичні співвідношення для об'єкту дослідження замінюються алгоритмом. Алгоритмічні моделі бувають *чисельними* і *імітаційними*.

При моделюванні технічних систем і процесів класифікація математичних моделей набуває додаткових ознак [4]:

- по етапах життєвого циклу створення об'єкту виділяють моделі *аналізу*, моделі *проектування*, моделі *впровадження* і т. д.;
- по рівню формалізації моделі можна виділити *концептуальну* модель (для користувача і аналітика), *формалізоване*, або *алгоритмічне*, опис і *програму-імітатор*;
- по методах побудови розрізняють моделі, створені за допомогою *аналітичних* і *статистичних* методів.

У основі *аналітичних* моделей процесів лежать фундаментальні закони тепло- і масопереносу, виражені у вигляді функціональних співвідношень (алгебри, інтегрально-диференціальних, кінечно-різницевих і т. д.). Тому аналітичні моделі описують і розкривають суть процесів і явищ, що протікають в досліджуваному об'єкті і визначають його властивості і поведінку. Методи дослідження аналітичних моделей: *аналітичні* (отримують загальне рішення в явному вигляді і підставляють в нього значення граничних і початкових умов) і *чисельні* (загальні рішення в явному вигляді замінюються наближеними). Як приклад аналітичних моделей можна назвати диференціальні рівняння.

У основі *статистичних* моделей лежать результати експериментального дослідження об'єкту. Тому ці моделі також називають *емпіричними*, *такими, що ідентифікуються*, *ймовірсно-статистичними*, *досвідчено-статистичними*. Статистичні моделі розглядають досліджуваний об'єкт як «чорний ящик» і не розкривають суть процесів і явищ, що протікають в ній, – вони просто відображають одну з можливих залежностей вихідних змінних від вхідних, тобто носять приватний характер на відміну від аналітичних моделей, які мають більш загальний характер. Приклади емпіричних моделей – кореляційні, регресійні моделі.

### **23.5. Цілі математичного моделювання для технічних об'єктів і технологічних процесів**

Раніше нами вже були детально викладені загальні цілі моделювання. З урахуванням специфіки технічних об'єктів і технологічних процесів машинобудівного виробництва має сенс їх конкретизувати і позначити цілі моделювання таким чином[4]:

1. Допомогти при вирішенні завдань стратегічного і тактичного управління.

Існує ієрархія завдань управління технологічними процесами і комплексами. На верхньому рівні вирішуються завдання стратегічного планування і управління. На нижніх рівнях – тактичні завдання календарного планування і поточного управління. Цій ієрархії завдань відповідає ієрархія математичних моделей.

2. Замінити неприпустимі на реальному технічному об'єкті досліди експериментами на його моделі.

Досліди на реальному об'єкті замінюються комп'ютерними (обчислювальними) експериментами, що дозволяє істотно підвищити якість ухвалюваних інженерних і управлінських рішень, понизити терміни і витрати на досягнення оптимальних результатів.

3. Звести дослідження реального об'єкту до рішення математичної задачі.

Математичне, програмне, комп'ютерне забезпечення, що є в даний час, дозволяє змодельовати і досліджувати велику кількість варіантів вирішуваного завдання, вибрати і обґрунтувати найбільш доцільне рішення.

4. Отримати ефективний інструмент дослідження складних систем і процесів.

Математичне моделювання дозволяє розглянути ряд процесів, що одночасно протікають в системі, і вибрати оптимальний інструмент їх дослідження.

5. Узагальнити знання, накопичені про об'єкт. Моделі служать як би акумуляторами знань про об'єкти і виконують особливу смислообразуючу роль в системі науково-технічних знань.

### **Питання для самоконтролю**

1. Що таке математична модель?
2. Що таке математичне моделювання?
3. З чого складається математична модель?
4. Які цілі математичного моделювання?
5. Назвіть види математичних моделей.
6. Що таке аналітична модель?
7. Що таке емпірична модель?
8. Позначте переваги математичного моделювання.
9. На чому засновано математичне моделювання?
10. Перерахуйте вимоги, що пред'являються до математичної моделі.

## **Розділ 3. Алгоритм побудови моделі**

### **3.1. Технології моделювання**

Раніше ми розглянули принципи моделювання (принцип інформаційної достатності, принцип здійсненності, принцип множинності моделей об'єкту, принцип агрегування, принцип параметризації). Ступінь реалізації цих принципів в кожній конкретній моделі може бути різним, що в значній мірі залежить від дотримання дослідником (суб'єктом моделювання) технології моделювання.

Технології комплексного моделювання є послідовністю наступних дій [5]:

- 1) визначення мети моделювання;
- 2) розробка концептуальної моделі;
- 3) формалізація моделі;
- 4) програмна реалізація моделі;
- 5) планування модельних експериментів;
- 6) реалізація плану експерименту;
- 7) аналіз і інтерпретація результатів моделювання.

Відповідно, загальна схема моделювання має наступний вигляд [4]:

- 1) проблема;
- 2) постановка завдання;
- 3) опис початкових даних;
- 4) формалізація завдання, вибір тимчасової і просторової шкал моделі;
- 5) вибір методу побудови моделі;
- 6) планування експерименту;
- 7) отримання і обробка експериментальних даних;
- 8) ідентифікація невідомих характеристик моделі;
- 9) вибір методу рішення задачі;
- 10) обчислювальний експеримент;
- 11) аналіз і інтерпретація результатів моделювання;
- 12) ухвалення рішень про використання результатів;
- 13) практичне використання моделі. Для прикладного використання в моделюванні технологічних

процесів представляється доцільним розглянути окремо алгоритми побудови аналітичної і емпіричної моделей.

### **3.2. Алгоритм побудови аналітичної моделі**

1. Виявлення суперечності і формулювання проблеми.
2. Визначення об'єкту дослідження. Постановка завдання (завдань) дослідження.
3. Аналіз апріорної інформації. Формулювання гіпотези дослідження.
4. Вибір вхідних і вихідних чинників.

5. Формалізація завдання.
6. Побудова моделі.
7. Планування і проведення експерименту.
8. Інтерпретація результатів моделювання.
9. Оцінка придатності моделі.
10. Рішення задачі оптимізації (є така є).
11. Використання моделі. Документування результатів.

### **3.3. Алгоритм побудови емпіричної моделі**

1. Виявлення суперечності і формулювання проблеми.
2. Визначення об'єкту дослідження. Постановка завдання (завдань) дослідження.
3. Аналіз апріорної інформації. Формулювання гіпотези дослідження.
4. Вибір вхідних і вихідних чинників.
5. Формалізація завдання.
6. Планування і проведення експерименту.
7. Обробка результатів експерименту.
8. Побудова моделі.
9. Перевірка адекватності моделі.
10. Інтерпретація результатів моделювання.
11. Оцінка придатності моделі.
12. Рішення задачі оптимізації (є така є).
13. Використання моделі. Документування результатів. Відмінності алгоритмів починаються з шостого етапу і пояснюються відмінностями в методах побудови моделі (див. про це вищий).

### **3.4. Коротка характеристика основних етапів алгоритмів побудови аналітичних і емпіричних моделей**

#### ***Етап виявлення суперечності і формулювання проблеми***

Даний етап моделювання є першим і найвідповідальнішим. Від правильності формулювання проблеми дослідження залежать результати моделювання і витрати (матеріальні, фінансові, тимчасові) на моделювання і дослідження об'єкту. Проте не стоїть до результатів, отриманих у фіналі цього етапу, відноситися як до догми: в ході моделювання формулювання і зміст проблеми часто коректуються, уточнюються. До того ж на всіх подальших етапах побудови моделі можливе повернення на сам початок роботи з метою кращого розуміння досліджуваної проблеми.

#### ***Етап визначення об'єкту дослідження і постановки завдання (завдань)***

На цьому етапі проблему необхідно «роздібнити»: виділити завдання, чітко їх сформулювати і визначити стратегію і тактику рішення кожній з них. Всі завдання дослідження повинні бути такими, що добре структуруються – це дозволить швидше знайти шляхи їх рішення. Дуже важливо також правильно і коректно поставити питання в кожному завданні (завдання може бути прямим або зворотним – див. про це вищий) і визначити її пріоритет і місце в загальному списку вирішуваних завдань.

## ***Етап аналізу апріорної інформації, формулювання гіпотези дослідження***

Аналіз апріорної інформації базується на вивченні вже наявних результатів дослідження подібних об'єктів і вирішення подібних завдань іншими дослідниками і виявленні аналогів з метою підвищення ефективності власного дослідження. Джерелами апріорної інформації є звіти по науково-дослідній роботі, книги, періодичні видання, матеріали конференцій, інформаційні ресурси Інтернету.

Результати аналізу апріорної інформації повинні бути наступними:

- чітке з'ясування суті власного дослідження і можливих методик його проведення;
- осмислення причин успіхів і невдач попередніх дослідників;
- попередній вибір вхідних і вихідних чинників і їх позначень;
- вибір методу побудови і дослідження моделі;
- формулювання гіпотези про можливий характер математичної моделі.

### ***Етап вибору вхідних і вихідних чинників***

*Чинник* – вимірювана змінна величина, що приймає в кожен момент часу деяке певне значення зі своєї області визначення.

При моделюванні технологічних процесів можна сформулювати наступні вимоги до вхідних чинників:

- вони повинні бути взаємно незалежними;
- кількісними і порівняно легко вимірюваними;
- простими і мати фізичний сенс;
- вони повинні бути універсальними і повними з погляду опису властивостей і структури досліджуваного об'єкту;

Вихідний чинник повинен бути однозначним (у статистичному сенсі цього слова).

У зворотних завданнях (завданнях оптимізації) вихідний чинник часто називають критерієм оптимізації.

Виділяють наступні види критеріїв оптимізації:

- економічні критерії оптимізації: прибуток, собівартість, витрати;
- технічний (або технологічний) – продуктивність;
- техніко-економічні: безвідмовність, відновлюваність і т. д.;
- інші критерії оптимізації: екологічні, ергономічні, естетичні і так далі

У технологічних процесах машинобудування критеріями оптимізації можуть бути стійкість ріжучого інструменту, точність базування, точність і шорсткість оброблених поверхонь, сила і температура різання і так далі

Якщо чинник не має кількісного вимірювання (наприклад, носить якісний характер), можна використовувати *ранжирування*.

*Ранг* - суб'єктивна кількісна оцінка якісного чинника, що зміряна за заздалегідь вибраною шкалою і не має фізичної розмірності.

### ***Етап формалізації завдання***

Сучасний математичний апарат вимагає, щоб для вирішення завдання було поставлене формально, тобто у вигляді математичної формули. Отже, необхідний перехід від вербального *опису* *апріорної* інформації про об'єкт

(схеми, тексту, таблиці, графіка і ін.) до кількісних співвідношень між вихідними і вхідними чинниками (а в моделі - змінними).

Під формалізацією розумітимемо «переклад» завдання дослідження і апріорної інформації про об'єкт з мови вербального опису на мову математичного опису.

Формалізація дозволяє підвищити якість і швидкість вирішення завдань моделювання об'єктів і процесів (оскільки в абсолютній більшості випадків використовується вже розроблене математичне і програмне забезпечення, наприклад, MATLAB, MATHCAD, MAPLE, STATISTICA, STSTGRAPHICS і ін.)\_

### **Етап побудови моделі**

При побудові аналітичної моделі можна використовувати «моделі-заготовки» - в них підставляють конкретні граничні і початкові умови для вирішення поставленого завдання.

При побудові емпіричної моделі спочатку потрібно провести експеримент. Потім результати експериментальних досліджень обробляються математичним апаратом статистичного аналізу (регресійного, дисперсійного, кореляційного і т. д.). Побудова регресійних моделей буде розглянута нами далі.

### **Етап планування та проведення експерименту**

Основою планування експерименту є *теорія планування факторного експерименту*, що дозволяє визначити необхідне і доста-точна кількість дослідів експерименту. В алгоритмі побудови емпіричними-чеський моделі цей етап обов'язково передує побудові моделі. В алгоритмі побудови аналітичної моделі планування та проведення експерименту здійснюється після побудови моделі і виконується для оцінки точності аналітичної моделі. При побудові аналітичних

моделей нерідкі випадки, коли для перевірки точності розроблюваної моделі об'єкта використовуються експериментальні дані, отримані іншими дослідниками в іншому місці і в інший час.

При плануванні експерименту визначаються остаточне кіль-кість самих вхідних факторів і кількість їх рівнів.

*Рівень фактора*-конкретне значення фактора з його області визна-ділення при експериментальному дослідженні об'єкта.

Сукупність рівнів вхідних факторів об'єкта (по одному рівню від фактора) визначає один стан об'єкта.

Якщо число рівнів всіх вхідних факторів однаково, то число всіх станів об'єкта ( $N_c$ ) Можна визначити за формулою

$$N_c = p^k,$$

де  $k$  - загальна кількість вхідних факторів;

$p$  - число рівнів кожного фактора.

*Мета планування експеримента*- визначити кількість факторів і їх рівнів для отримання необхідної і достатньої інформації про об'єкт дослідження.

Детально питання планування експерименту будуть розглянуті нами далі.

**Етап перевірки адекватності моделі** (для емпіричних моделей)



*Адекватність* (від лат. *Adaequatus*- прирівняний [2]) моделі характеризує її відповідність експериментальним даним. Перевірка здійснюється за спеціальними критеріями (див. про це далі).

#### ***Етап інтерпретації результатів моделювання***

*Інтерпретація* - «переклад» для користувача результатів моделювання досліджуваного об'єкта з мови математики на мову вербального опису (в схеми, графіки, таблиці і т. д.).

На етапі інтерпретації оцінюється, наскільки результати моделювання (зокрема, модель) відповідають здоровому глузду і існуючій інформації про поведінку і властивості об'єкту.

#### ***Етап рішення задачі оптимізації***

Завдання оптимізації – одні з найбільш поширених науково-технічних завдань. Вони виникають в той момент, коли встановлена можливість здійснення процесу і потрібно знайти якнайкращі (оптимальні) умови його реалізації. Завжди необхідно чітко формулювати, в якому сенсі умови повинні бути оптимальними. Це впливає на вибір цілей дослідження. Вище були розглянуті прямі і зворотні завдання. Зворотні завдання за своєю суттю і є завданнями оптимізації.

При рішенні задачі оптимізації необхідно вибрати метод пошуку оптимального рішення залежно від особливостей досліджуваного об'єкту, моделі і вирішуваного завдання і застосувати його для отримання «якнайкращих» характеристик або варіантів поведінки об'єкту або дії на нього.

#### ***Етап використання моделі і документування результатів***

Після отримання і перевірки моделі для її подальшого використання необхідно оформити результати моделювання.

### **Питання для самоконтролю**

1. Назвіть основні етапи алгоритму побудови аналітичної моделі.
2. Назвіть основні етапи алгоритму побудови емпіричної моделі.
3. Розкажіть про відмінності в алгоритмах побудови аналітичної і емпіричної моделей.
4. Назвіть джерела апріорної інформації.
5. Що є результатом аналізу апріорної інформації?
6. Які вимоги пред'являються до вхідних і вихідних чинників?
7. Що таке критерій оптимізації? Перерахуйте види критеріїв оптимізації.
8. Що таке ранг?
9. Що таке формалізація?
10. Що таке інтерпретація?

## Частина 2. ПОБУДОВА ЕМПІРИЧНИХ РЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

### Розділ 4. Планування і проведення експерименту

#### 4.1. Основні поняття і визначення

Людина експериментує скрізь і завжди. І природним (хоча і суперечливим) є бажання проводити експеримент в найбільш короткий термін з найменшими витратами, отримуючи при цьому достовірну і точну інформацію.

Із загальнофілософської точки зору *експеримент* (від латів. *experimentum* – проба, досвід) – це плотьско-наочна діяльність в науці, у вузчому сенсі слова – досвід, відтворення об'єкту пізнання, перевірка гіпотез і так далі [10]. Більшість наукових досліджень пов'язана з експериментом – фізичним, психологічним або модельним. Останнім часом разом з фізичними моделями все більше використовуються комп'ютерні, на яких можна проводити імітаційні експерименти і отримувати нові відомості про об'єкт.

При дослідженні простих об'єктів достатньо проведення однофакторного експерименту. Раніше вважалося, що досвід повинен бути чистим, тобто всі сторонні впливи виключені. Об'єкт розглядали ізольовано від інших, без зворотних зв'язків і складних взаємодій.

З ускладненням об'єкту дослідження з'явилася потреба в оптимізації експериментальних досліджень. Експеримент сам став об'єктом дослідження, і об'єктом дуже складним.

У технічній літературі експеримент визначається таким чином: *експеримент* – це система операцій, дій або спостережень, направлених на отримання інформації про об'єкт дослідження [10].

Хоча об'єкти досліджень дуже різноманітні, всі методи експериментальних досліджень мають багато загального:

- яким би простим не здавався експеримент, дослідники завжди починають з його планування;
- дослідники завжди прагнуть скоротити число досліджуваних входних чинників, щоб зменшити об'єм експерименту;
- дослідники завжди прагнуть контролювати хід експерименту і виключити вплив випадкових зовнішніх чинників.

*Планування експерименту* – розділ математичної статистики, що вивчає раціональну організацію вимірювань і спостережень [4]. Планування експерименту полягає в процедурі вибору числа і умов проведення дослідів, необхідних і достатніх для дослідження об'єкту із заданою точністю. Планування експерименту забезпечує [10, 11]:

- одночасне варіювання всіх чинників по спеціальних правилах;
- використання математичного апарату, що формалізує багато дій експериментатора;
- вибір чіткої стратегії, що дозволяє ухвалювати обґрунтовані рішення після кожної серії експериментів;
- мінімізацію числа дослідів, ресурсів (фінансових, тимчасових, матеріальних, людських).

У основі побудови емпіричних моделей лежить *теорія багатofакторного експерименту* (МФЕ), розроблена Р. Фішером в 30-і рр. ХХ ст., яка спирається на вивчення стану і поведінки об'єкту при одночасній зміні декількох вхідних чинників.

Раніше ми вже говорили, що будь-який об'єкт може знаходитися в нескінченно великій кількості станів. Виходячи з цього, експеримент можна розглядати як реалізацію всіх або частини станів, в яких може знаходитися об'єкт.

У теорії багатofакторного експерименту сам експеримент розуміється як сукупність дослідів.

*Досвід* – відтворення досліджуваного об'єкту в строго певних умовах при нагоді реєстрації результатів.

За формою проведення і представлення результатів експерименти бувають *якісними* і *кількісними* [10].

*Якісний експеримент* встановлює сам факт наявності об'єкту, процесу або явища, але при цьому не дає ніяких кількісних характеристик.

*Кількісний експеримент* не тільки фіксує сам факт існування того або іншого об'єкту, процесу або явища, але і дозволяє встановити співвідношення між кількісними характеристиками поведінки досліджуваного об'єкту і кількісними характеристиками зовнішньої дії.

Раніше нами вже були введені поняття «*чинник*» і «*рівень чинника*». Пригадаємо їх.

*Чинник*- деяка змінна величина, що приймає в кожен момент часу певне значення зі своєї області визначення і від-ражає зовнішній вплив на об'єкт або його відгук на цей вплив.

*Рівень фактора* -конкретне значення фактора з його області визначення при експериментальному дослідженні об'єкта.

При проведенні дослідів дуже важливо, чи може дослідник під час дослідів встановлювати ті рівні факторів, які представляють для нього інтерес. З цієї точки зору розрізняють наступні фактори [10]:

- *контрольовані і управляемі* - це фактори, для яких можна не тільки зареєструвати їх рівень, а й задати в кожному досвіді будь можливе значення;

- *контрольовані, але не управляемі* - це фактори, рівні яких можна тільки реєструвати, але задавати в кожному дослідженні визначене значення практично неможливо;

- *неконтрольовані* - це фактори, рівні яких не реєструються дослідником, він навіть може не підозрювати про їх існування.

Якщо дослідник має можливість контролювати і управляти рівнями

факторів, то такий експеримент можна назвати *активним*. Якщо дослідник може тільки спостерігати і реєструвати, але не має можливості управляти рівнями факторів, то це *пасивний* експеримент.

Під час експериментального дослідження об'єкт розглядається як «чорний ящик» (рис. 4.1).

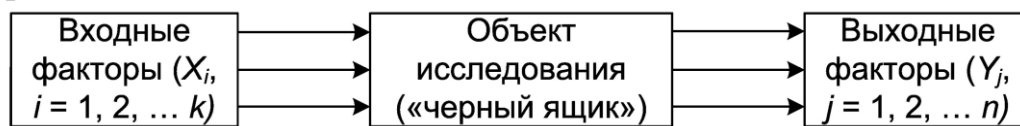


Рис. 4.1. Об'єкт дослідження в загальному вигляді

Вихідні фактори в експерименті ще називають відгуком, а залежність

$$Y_j = f(X_1, X_2, \dots, X_k),$$

, яку намагаються встановити, - *функцією відгуку*.

## 4.2. Планування експерименту

### 4.2.1. Вибір рівнів факторів

План *експеримента* - сукупність даних, що визначають число, умови і порядок реалізації дослідів.

Раніше було сказано, що кожен фактор має свою область визначення. Сукупність областей визначення вхідних факторів назвемо *факторним простором*. Кожна точка факторного простору являє собою цілком певне поєднання конкретних значень вхідних факторів і відповідає одному станом об'єкта. На основі аналізу завдання дослідження і апріорної інформації про досліджуваний об'єкті для кожного вхідного фактора виділяється область, в межах якою він буде змінюватися під час експерименту. Поєднання таких областей по всіх вхідним факторам будемо називати *факторним простором експерименту*.

Планування експерименту починають з вибору *нульового рівня* кожного вхідного фактора, в якості якого може бути взята будь-яка точка факторного простору експерименту. Але однією точки – нульового рівня-для проведення експерименту і отримання необхідної інформації недостатньо. Потрібні ще точки. Побудова плану експеримента - це вибір точок (рівнів вхідних факторів) відносно нульового.

Для визначення інших рівнів вхідних факторів вводиться *інтервал варіювання* кожного вхідного фактора. Щоб позначити *верхній рівень* вхідного фактора, слід інтервал варіювання додати до нульовому рівню даного чинника, а щоб визначити *нижній рівень*-ви-честь інтервал варіювання з нульового рівня.

На інтервал варіювання

накладаються обмеження природного характеру знизу і зверху.

До інтервалу варіювання вхідного фактора пред'являються слe-дмуть вимоги:

- він не може бути менше помилки, з якої вимірюється даний фактор, інакше рівні чинника будуть невиразні;
- він не може бути занадто великим, т. Е. Нижні і верхні рівні не повинні

покидати області визначення фактора та області проведення експерименту.

Зазвичай при первинному плануванні експерименту кількість рівнів по всіх вхідних чинниках вибирають однаковим. Тоді кількість дослідів в експерименті ( $N_e$ ) може бути визначене по формулі

$$N_e = p_e^{k_e}$$

де  $p_e$  – число рівнів кожного вхідного чинника;

$k_e$  – число вхідних чинників, досліджуваних в експерименті.

Якщо з аналізу апріорної інформації відомо, що досліджувана залежність  $Y_j = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$  є лінійною, то досить реалізувати експеримент, в якому кожен вхідний чинник має в експерименті тільки два рівні, тобто

$$N_e = 2^{k_e}$$

Такий план експерименту називається *планом першого порядку*. Якщо з аналізу апріорної інформації відомо, що досліджувана залежність  $Y_j = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$  є нелінійною, то досить реалізувати експеримент, в якому кожен вхідний чинник має три рівні. Такий план називається *планом другого порядку*, а

$$N_e = 3^{k_e}$$

#### 4.2.2. Повний факторний експеримент

*Повний факторний експеримент (ПФЕ)* – це експеримент, в якому реалізуються всі можливі поєднання всіх рівнів всіх вхідних чинників [4] (наприклад,  $N_e = 2^{k_e}$ ,  $N_e = 3^{k_e}$ ).

Умови повного факторного експерименту записують у вигляді таблиці – *матриці планування* експерименту. Для експерименту, що досліджує об'єкт з двома вхідними чинниками, кожен з яких змінюється по двох рівнях, матриця планування має наступний вигляд (таблиця).

Матриця планування повного факторного експерименту  $N_e = 2^2$

*Примітка.* Знаком «+» позначені верхні рівні чинників, знаком «-» – нижні.

Так виглядає кодована форма запису.

Якщо для дослідження вхідного чинника було вибрано три рівні, включаючи нульовий, то в матриці планування вони позначаються знаками «-» (нижній), «0» (нульовий), «+» (верхній). На рис. 4.2 показана геометрична інтерпретація повного факторного експерименту  $N = 2^2$ . Якщо вибрано два нижніх і два верхні рівні, то вони позначаються як «-2» (другий нижній), «-1» (перший нижній), «+1» (перший верхній) і «+2» (другий верхній).

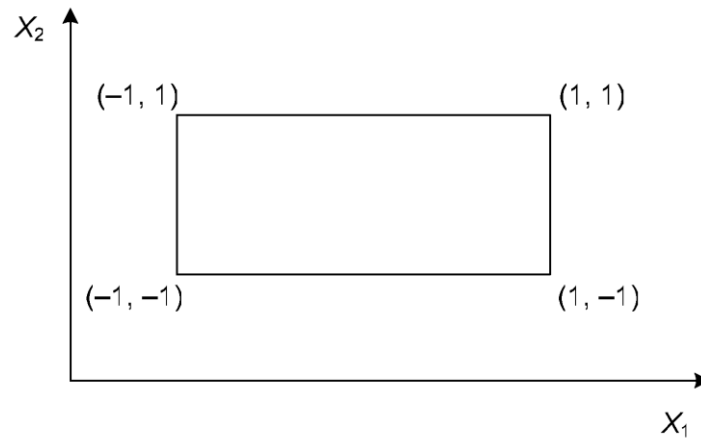


Рис. 4.2. Геометрична інтерпретація повного факторного експерименту  $N = 2^2$

Незалежно від числа чинників матриці ПФЕ володіють наступними загальними властивостями [4]:

- *симетричність щодо центру експерименту* – алгебраїчна сума елементів вектора-стовпця кожного чинника рівна нулю;
- *умова нормування* – сума квадратів елементів кожного стовпця рівна числу дослідів;
- *ортогональність* – сума почлених виразів будь-яких два вектор-стовпців матриці рівна нулю;
- *рототабельність* – крапки в матриці планування підбираються так, що точність прогнозів значень параметра оптимізації однакова на рівних відстанях від центру експерименту і не залежить від напрямку.

Повний факторний експеримент страждає надмірністю дослідів. Якщо аналіз апріорної інформації дає підстави вважати, що у вибраній області експерименту об'єкт описується лінійною моделлю, то кількість дослідів можна мінімізувати, скоротивши матрицю планування експерименту. Такий експеримент називається *дробовим факторним експериментом* (ДФЕ), а таблиця його плану – *дробовою реплікою* [4, 10, 11, 13 і др]. Зменшення числа дослідів дозволяє понизити витрати часу, засобів, матеріалів на проведення і обробку експерименту.

### 4.3. Проведення експерименту

Перед проведенням експерименту необхідно з'ясувати наступне:

- 1) чи можна встановити вибрані рівні вхідних чинників на використовуваному для експерименту устаткуванні і утримувати їх під час досвіду;

2) чи можливе виникнення негативних наслідків від реалізації вибраних поєднань рівнів чинників;

3) чи можливе проведення паралельних дослідів під час експерименту;

4) коли були перевірені і відкалібровані вимірювальні прилади.

Паралельними називаються досліди, в яких рівні чинників повторюються. Рекомендується повторювати експерименти не менше трьох разів. Проведення паралельних дослідів дає можливість зробити надійнішими оцінки впливу вхідних чинників на вихідний чинник і виконати розрахунки статистичних характеристик.

Після складання матриці планування необхідно провести рандомізацію дослідів.

*Рандомізація* (від англ. *random* – випадковий) – введення випадкової послідовності проведення дослідів.

Мета рандомізації – виключення появи і впливу систематичних помилок на результати експерименту.

Досліди необхідно рандомізувати в часі.

Для генерування випадкової послідовності дослідів можна використовувати програми-генератори випадкових чисел. Вибрану випадковим чином послідовність дослідів порушувати не рекомендується.

Експеримент, який ставиться для вирішення завдань оптимізації, називається *екстремальним*. Якщо не ставиться завдання оптимізації, а потрібно встановити тільки кількісний зв'язок між вхідними і вихідними чинниками, то такий експеримент часто називають *інтерполяційним*.

Після проведення експерименту слід ретельно проаналізувати отримані результати. Якщо серед результатів вимірювань вихідного чинника одно-два-три різко відрізняються від останніх, то слід перевірити, чи немає вони грубими викидами, які підлягають виключенню<sup>1</sup>.

### Питання для самоконтролю

1. Що таке експеримент?
2. Що таке планування експерименту?
3. Позначте цілі планування експерименту.
4. Що таке досвід?
5. Які види експериментів існують?
6. Що таке план експерименту?
7. Що таке нульовий рівень чинника? Як він вибирається?
8. Що таке інтервал варіювання? Як він вибирається?
9. Що таке повний факторний експеримент?
10. Що таке матриця планування експерименту?
11. Назвіть властивості матриці повного факторного експерименту.
12. Що таке дробова репліка?
13. Що таке рандомізація? Яка мета проведення рандомізації?
14. Що таке екстремальний експеримент?
15. Що таке інтерполяційний експеримент?

<sup>1</sup> Методику відсіювання грубих викидів по таблицях критичних різниць розглянуто в кн.: *Рогів В. А. Методика і практика технічних експериментів: навчань. допомога. М., 2005. 288 с.*

## Розділ 5. Регресійні моделі з однією вхідною змінною

### 5.1. Основні поняття

Технологічні процеси машинобудівного виробництва, особливо процеси обробки різанням конструкційних матеріалів, дуже складні по своїй фізико-хімічній природі. До цих пір відсутні прийняті всіма аналітичні моделі, закономірності процесів зношування і вантаження інструменту, що точно описують, теплових процесів в зоні різання і так далі. Тому в технології машинобудування дуже часто використовують моделі, які ми раніше позначили як емпі-

рические. Емпіричні моделі об'єктів і процесів є результатом обробки експериментальних даних про поведінку об'єкту або процесу методами математичного статистичного аналізу. Дуже часто для побудови моделей об'єктів за наслідками експериментальних досліджень використовують математичний апарат регресійного і кореляційного аналізу.

Терміни «*регресія*» і «*кореляція*» були введені в широке вживання статистиками Ф. Гальтоном і К. Пірсоном в кінці XIX ст. Вони вивчали взаємозалежності зростання і маси людей різного віку і зіткнулися з необхідністю введення таких показників вказаної залежності, які б відображали зв'язок між досліджуваними характеристиками людини, але не визначали б один одного строго однозначно. В даний час «*регресія*» і «*кореляція*» – основні поняття статистики.

Основне завдання *кореляційного аналізу* – виявлення значущості зв'язку між значеннями різних випадкових величин. Залежність між величинами (у тому числі і випадковими), при яких одному значенню однієї величини (аргументу) відповідає одне або декілька цілком певних значень іншої величини, називається, відповідно, *однозначною* або *багатозначною функціональною залежністю* [11]. Залежність між величинами, при якій кожному значенню однієї величини відповідає з відповідною вірогідністю безліч можливих значень інший, називають *імовірнісною* (стохастичною, статистичною). Прикладами кореляційного зв'язку є залежності між межами міцності і текучості сталі певної марки, між погрішностями розміру і погрішністю форми поверхні деталі, між температурою випробування і міцністю матеріалу і так далі

Математичний апарат *регресійного аналізу* дозволяє:

- оцінити невідомі параметри пропонованої до дослідження регресійної моделі;
- перевірити статистичну значущість параметрів моделі;
- перевірити адекватність моделі;



- оцінити точність моделі.

Вид регресійної моделі пропонує сам дослідник, при цьому він виходить з наступного:

- фізичній суті об'єкту, що вивчається, або явища;
- характеру експериментального матеріалу;
- аналізу апріорної інформації.

Найпростішим для моделювання є об'єкт, у якого один вхідний і один вихідний чинник (рис. 5.1). Вхідний чинник характеризує дія на досліджуваний об'єкт. У технологічних процесах машинобудування це можуть бути температура, сила, час, геометричні параметри інструменту, характеристики оброблюваного і інструментального матеріалів і так далі. Вихідний чинник характеризує реакцію (відгук) об'єкту на дію вхідного чинника. Вихідні чинники в технологічних процесах машинобудування – довжина пройденого інструментом шляху, величина зносу, напруга, якість обробленої поверхні і т. д.

Рис. 5.1. Об'єкт дослідження з одним вхідним і одним вихідним чинником

Для початку побудови емпіричної моделі необхідно мати дані експериментальних досліджень об'єкту (у вигляді таблиці або графіка), в яких кожному значенню вхідного чинника ( $X$ ) відповідає значення вихідного чинника ( $Y$ ), тобто відома пара чисел  $(x_i, y_i)$ . Пари випадкових змінних  $(x, y)$  підкоряються деякому двовимірному імовірнісному розподілу. Загальна кількість пар чисел хай рівне  $m$  (рис. 5.2).

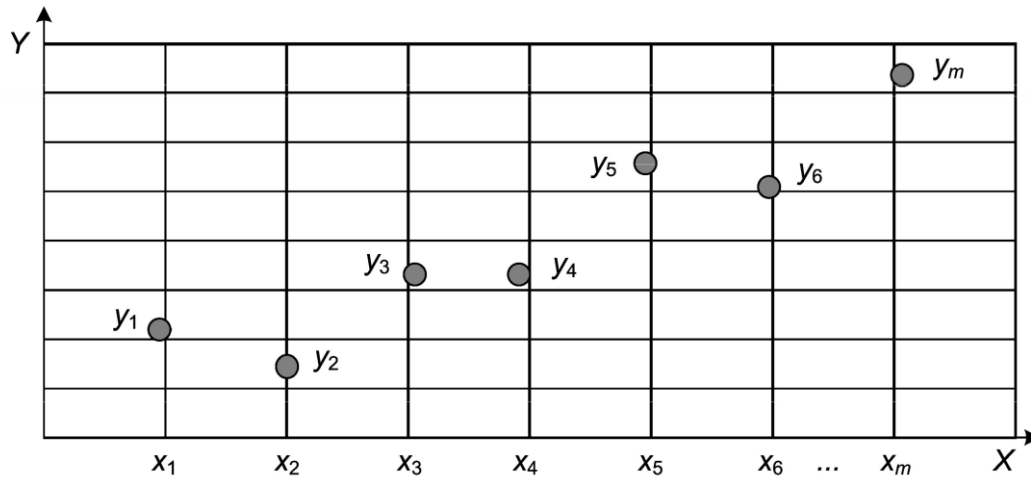


Рис. 5.2. Графічне відображення результатів експерименту

Даний графік називається *діаграмою розсіяння*, або *точковою діаграмою* [12]. Необхідно знайти таку криву, яка б найкращим чином апроксимувала експериментальні крапки. Для зручності подальшого дослідження об'єкту ця

крива повинна мати для свого опису одну єдину формулу (функцію). Якщо ми з'єднаємо крапки на графіці, то отримаємо ламану лінію, що складається з декількох прямих відрізків і описувану відповідною кількістю лінійних моделей. Це украй незручно для дослідження. Необхідно знайти криву, що найкращим чином описує всі експериментальні крапки (рис. 5.3). Таку криву називають *кривою регресії*, або *регресійній кривою*  $Y$  по  $X$ . У загальному випадку крива регресії може мати будь-який вигляд (що монотонно зростає, монотонно убиває, з точками перегину і т. д.), але вона повинна бути безперервною, тобто не повинна мати розривів. У найпростішому випадку крива регресії має вид прямої лінії.

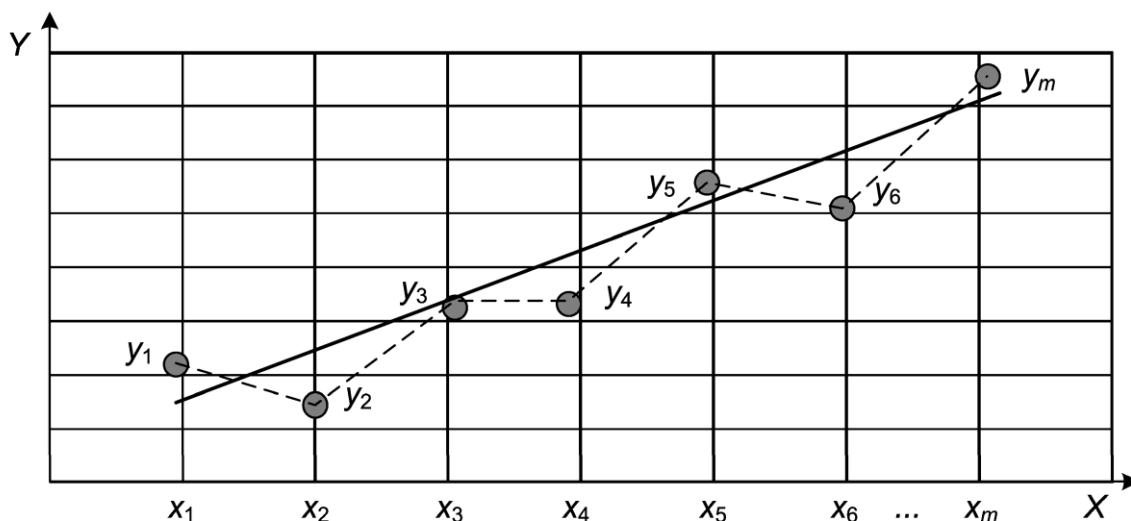


Рис. 5.3. Побудова лінії регресії

Звичайна побудова моделей і дослідження об'єкту починають з найпростіших моделей – *лінійних*. Лінійній моделі відповідає крива регресії у вигляді *простої лінії*.

Як видно з графіка (див. рис. 5.3), завжди є відхилення експериментальних крапок від кривої регресії, що викликане впливом інших (неврахованих в моделі) зовнішніх чинників на досліджуваний об'єкт. У моделюванні вихідний чинник ще називають *залежною вихідний змінної*, а вхідною – *незалежною вхідною змінною*. Під час дослідження об'єкту вхідний чинник завжди носить детермінований характер, а вихідний - випадковий.

Вираз, який встановлює зв'язок між випадковою залежною і детермінованою незалежною змінними, є *рівнянням регресії*. Термін «рівняння регресії», строго кажучи, не зовсім коректний [12], але загальноприйнятий. Модель, побудована на основі рівняння регресії, є *регресійною моделлю*. Як указувалося раніше, для отримання регресійних моделей (рівнянь регресії) використовується математичний апарат регресійного аналізу.

Отже, як ми вже говорили, підбір кривої регресії і регресійної моделі

зазвичай починають з простої прямої лінії і, відповідно, з лінійної моделі. Якщо мати необмежено велику кількість експериментальних крапок, то лінійна регресійна модель має вигляд [12]

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \varepsilon,$$

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot x,$$

де  $\hat{y}$  - значення вихідної змінної, розраховані (передбачені) по лінійній моделі;

$x$  - значення вхідної змінної;

$\beta_0$  і  $\beta_1$  - коефіцієнти регресії;

$\varepsilon$  - залишку (нев'язність).

Визначення коефіцієнтів регресії здійснюється на основі *методу найменших квадратів*. Метод найменших квадратів застосовують в тих випадках, коли випадкова варіація вхідного чинника зневажливо мала в порівнянні із спостережуваним діапазоном його вимірювання [12], тобто значення вхідної змінної вважаються фіксованими. Суть методу в тому, що підбираються такі  $\beta_0$  і  $\beta_1$  при яких сума квадратів відхилень зміряних величин  $y$  від передбачених  $\hat{y}$  була б мінімальною.

Для пар спостережень можна записати

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$

Відхилення виміряної величини  $y$  від передбаченої  $\hat{y}$

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y} = y_i - (\beta_0 + \beta_1)x_i.$$

Сума квадратів відхилень виражається у вигляді

$$S = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2,$$

де  $S$  - функція суми квадратів.

Підберемо  $\beta_0$  і  $\beta_1$  так, щоб при підстановці їх замість  $\beta_0$  і  $\beta_1$  значення  $S$  було мінімальним з можливих. Знайдемо частні похідні ( $\partial$ ):

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^m (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^m x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i).$$

Найменше значення суми квадратів відхилень досягається у тому випадку, коли коефіцієнти  $\beta_0$  і  $\beta_1$  задовольняють умові [11]

Наявні експериментальні дані у вигляді пар  $(x_i, y_i)$  є лише обмеженою вибіркою із загального числа станів досліджуваного об'єкту. Тому можна визначити тільки оцінки коефіцієнтів  $\beta_0$  і  $\beta_1$  які позначають, відповідно,  $b_0$  і  $b_1$ .

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x.$$

Такі моделі в літературі часто називають *однофакторними регресійними моделями*. Коефіцієнт регресії  $b_1$  визначається по формулі [12]

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2},$$

де  $x_i$  – значення вхідного чинника під час експерименту;  
 $y_i$  – значення вихідного чинника, відповідне  $x_i$ ;

$\bar{x}$  - середнє значення вхідного чинника, визначуване по формулі

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m},$$

$\bar{y}$  - середнє значення вихідного чинника, визначуване по формулі

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m}.$$

Коефіцієнт регресії  $b_0$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

Отримуємо

$$\hat{y} = \bar{y} + b_1(x_i - \bar{x}),$$

де  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  - координати «центру тяжіння» експериментальних даних, через який обов'язково проходить лінія регресії.

### **5.2. Адекватність регресійних моделей**

На визначенні коефіцієнтів регресійної моделі побудова моделі не закінчується. Необхідно встановити адекватність і точність пропонованої моделі. *Адекватність моделі* характеризує відповідність моделі експериментальним даним і статистичну значущість рівняння регресії. Адекватність регресійної моделі оцінюється коефіцієнтом Фішера ( $F_{розр}$ )

$$F_{\text{расч}} = \frac{\sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}.$$

Критерієм Фішера є відношення суми квадратів відхилень, обумовлених

регресією, до суми квадратів відхилень щодо регресії.

Формулюємо нульову гіпотезу  $H_0: \beta_1 = 0$ . Розрахункове значення коефіцієнта  $F_{розр}$  необхідно порівняти з табличним значенням  $F_{табл}(m, \alpha)$ . У цьому записі  $m$  - загальна кількість експериментальних спостережень  $(x_i, y_i)$ , яка впливає на кількість мір свободи при визначенні критерію Фішера.  $\alpha$  - рівень значущості - вірогідність, з якою ми можемо відкинути правильну гіпотезу про модель як неправильну. Зазвичай в моделюванні використовують значення  $\alpha = 0,05; 0,01$ .

Якщо  $F_{розр} > F_{табл}$ , то нульова гіпотеза відкидається, модель вважається адекватною, а регресія - значущою. Якщо  $F_{розр} < F_{табл}$ , то регресійна модель неадекватна і використовувати її для аналізу і дослідження об'єкту не можна. В цьому випадку необхідно знову проаналізувати апіорну інформацію, знову спланувати і провести експеримент.

Значення коефіцієнта Фішера зазвичай надані в довідниках за математичною статистикою і теорією вірогідності.

### **5.3. Точність регресійних моделей**

Для оцінки *точності регресійних моделей з однією вхідною* використовується вибірковий коефіцієнт кореляції Пірсона ( $r_{xy}$ ), який визначається по формулі [12]

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Коефіцієнт кореляції  $r_{xy}$  характеризує тісноту зв'язку між вихідний змінної  $y$  та вхідної змінної  $x$ . Область визначення коефіцієнта кореляції  $r_{xy}$  лежить в межах від -1 до +1 включно. Можна виділити декілька окремих випадків значення коефіцієнта кореляції (рис. 5.4)

Чим вище значення  $r_{xy}$ , тим тісніше зв'язок між вихідний перемінной  $y$  та вхідної змінної  $x$ , тим точніше, а отже, краще математична модель.

#### Рис. 5.4. Частні випадки значення коефіцієнта кореляції

Якщо модель має низьке значення  $r_{xy}$ , то вона має низьку точність оцінки і прогнозу поведінки або властивостей об'єкту. Таку модель використовувати для дослідження, опису і прогнозу об'єкту не рекомендується. З декількох моделей, проаналізованих під час моделювання, для дослідження об'єкту вибирається та модель, у якій коефіцієнт кореляції  $r_{xy}$  має найбільше значення. Після розрахунку коефіцієнта кореляції проводять перевірку його значущості за допомогою критерію Стьюдента. Коефіцієнт кореляції, розрахований для

моделі ( $r_{розр}$ ), порівнюється з табличним (граничним) значенням ( $r_{табл}$ ). Якщо  $r_{розр} > r_{табл}$ , то  $r_{розр}$  приймається як показник тісноти зв'язку і навпаки [10]. Табличні значення  $r_{табл}$  можна знайти в довідниках по теорії вірогідності і математичній статистиці.

Якщо спробувати оцінити стандартну помилку для передбачених значень вихідного чинника  $\bar{y}$ , то якнайкращі прогнози будуть в «центрі тяжіння» експерименту [12]. Чим далі від «центру тяжіння», тим менш точними будуть прогнози  $\bar{y}$ .

#### **5.4. Види регресійних моделей з однією вхідною змінною**

Якщо в результаті розрахунку коефіцієнта кореляції  $r_{xy}$  лінійна модель визнана недостатньо точною, переходять до дослідження складніших моделей:

*степенною*

$$(y = b_0 x^{b_1}),$$

*експоненціальною*

$$(y = \exp(b_0 + b_1 x)),$$

*зворотньою*

$$(y = b_0 + \frac{b_1}{x} \text{ или } y = \frac{1}{b_0 + b_1 x}),$$

*полінома*

$$(y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2).$$

Поліном і зворотні моделі є лінійними по параметрах, тому для оцінки їх коефіцієнтів регресії, кореляції і критерію адекватності можна використовувати формули (5.10) (5.13) (5.15) (5.16). Статечна і експоненціальна моделі вимагають додаткових перетворень у вигляді логарифмування.

#### **Питання для самоконтролю**

1. Що таке лінійна регресія?
2. Що таке рівняння регресії?
3. Які моделі називаються регресійними?
4. На основі якого методу визначаються коефіцієнти регресії?
5. Як визначаються коефіцієнти регресії однофакторної моделі?
6. Яким критерієм оцінюється адекватність моделі з одним вхідним чинником?
7. Що робити, якщо модель виявляється неадекватною?
8. Як оцінюється точність однофакторної моделі?
9. Де точність прогнозів значень вихідного чинника вища?
10. Якими, окрім лінійної, можуть бути моделі з однією вхідною змінною?

## Розділ 6. Регресійні моделі з декількома вхідними змінними

### 6.1. Багатофакторна (множинна) лінійна регресія

Розглянемо основи побудови регресійних моделей для об'єкту з декількома вхідними змінними (рисунок).

Об'єкт дослідження з декількома вхідними чинниками

Для побудови моделі необхідно мати дані експериментальних досліджень об'єкту, представлені у вигляді таблиці, де кожній комбінації значень вхідних чинників відповідає значення вихідного чинника.

Дані експериментальних досліджень об'єкту

Моделювання об'єкту з складною зовнішньою дією у вигляді декількох вхідних чинників, так само як і для об'єкту з одним вхідним чинником, починається з лінійної моделі.

Якщо мати необмежено велику кількість експериментальних крапок, то лінійна регресійна модель з декількома вхідними змінними має вигляд

$$\bar{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots + \beta_k x_k,$$

де  $x_1, x_2, x_3$  і так далі - значення вхідної змінної;

$\beta_0, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_k$  – коефіцієнти регресії.

Наявні експериментальні дані у вигляді комбінацій  $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i} \dots x_{ki}, y_i)$  є лише обмеженою вибіркою із загального числа станів досліджуваного об'єкту. Тому можна визначити тільки оцінки коефіцієнтів  $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \dots$ , які позначають, відповідно,  $b_0, b_1, b_2, b_3 \dots, b_k$ .



$$\bar{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_kx_k.$$

Такі моделі в літературі часто називають *багатофакторними моделями*. Проте визначити коефіцієнти регресії  $b_i$  так, як це робиться для однофакторної моделі – по методу найменших квадратів, в даному випадку не представляється можливим. Необхідно використовувати основи алгебри матриць і матричного числення.

## 6.2. Матричний підхід до визначення коефіцієнтів регресії

Запишемо для нашого випадку матриці  $X, Y, B$ :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & \dots & x_{k2} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & x_{33} & \dots & x_{k3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1m} & x_{2m} & x_{3m} & \dots & x_{km} \end{bmatrix}.$$

У матриці  $X$  всі елементи першого стовпчика рівні одиниці. Рахуватимемо це фіктивною вхідною змінною  $X_0$  з постійним значенням

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{bmatrix}.$$

Визначимо розмірність цих матриць:

- $Y$  - вектор спостережень ( $m \cdot 1$ );
- $X$  - матриця незалежних змінних ( $m(k + 1)$ );
- $B$  - вектор коефіцієнтів регресії ( $(k + 1) \cdot 1$ ).

Правила множення матриць і векторів вимагають, щоб вони були *узгодженими* і мали відповідну розмірність [9, 12].

Нехай  $A$  - матриця розмірністю ( $n \cdot p$ ):

- на матрицю  $A$  тільки зліва може бути помножена матриця  $B$  розмірністю ( $m \cdot n$ ):

$$B \cdot A = (m \cdot n \cdot n \cdot p) = C(m \cdot p);$$

- на матрицю  $A$  тільки справа може бути помножена матриця  $D$  розмірністю ( $p \cdot q$ ):

$$A \cdot C = (n \cdot p \cdot p \cdot q) = F(n \cdot q).$$

Отже, множення  $B \cdot X$  не існує і множинна лінійна регресія може бути записана

у вигляді

$$Y = X \cdot B.$$

Використання апарату лінійної алгебри дозволяє отримати загальну формулу для визначення вектора, що містить коефіцієнти регресії [9]:

$$B = (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot Y,$$

де  $(X' \cdot X)^{-1}$  - зворотня матриця;

$X'$  - транспонована матриця.

Визначенням коефіцієнтів регресійної моделі побудова моделі не закінчується. Необхідно також визначити адекватність і точність запропонованої багатofакторної моделі.

### **6.3. Оцінка адекватності і точності багатofакторної лінійної моделі**

Адекватність моделі характеризує відповідність моделі експериментальним даним і статистичну значущість рівняння регресії. Адекватність регресійної моделі оцінюється коефіцієнтом Фішера

$$F_{\text{расч}} = \frac{\sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}.$$

Розрахункове значення коефіцієнта ( $F_{\text{расч}}$ ) необхідно порівняти з табличним значенням ( $F_{\text{табл}}(m, \alpha)$ ), де  $m$  - загальна кількість експериментальних спостережень,  $\alpha$  - рівень значущості.

$\alpha$  - рівень значущості - вірогідність, з якою правильна гіпотеза про модель може бути знехтувана як неправильна. Зазвичай в моделюванні (і ми про це вже говорили) використовують значення  $\alpha = 0,05; 0,01$ . Проте для багатofакторних моделей табличне значення  $F$  - критерія залежить ще і від числа вхідних змінних [9].

Якщо  $F_{\text{розрах}} > F_{\text{табл}}$ , то модель вважається адекватною, а регресія статистично значущою. Якщо  $F_{\text{розрах}} < F_{\text{табл}}$ , то регресійна модель неадекватна і регресія статистично незначуща.

Для оцінки точності регресійних моделей з декількома вхідними змінними використовується множинний коефіцієнт кореляції ( $R^2$ ) [4], який визначається по формулі

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y}_i)^2}.$$

Відношення  $R^2$  характеризує тісноту зв'язку між вихідний змінної і вхідними змінними. Область визначення відношення  $R^2$  лежить в межах від 0 до 1. При  $R^2 = 0$  вихідний чинник у лінійно не залежить від вхідних чинників  $x_1, x_2, \dots, x_k$  - можна сказати, що кореляційний зв'язок між вихідним чинником і вхідними чинниками відсутній. При  $R^2 = 1$  вихідний чинник у лінійно залежить від вхідних чинників  $x_1, x_2, \dots, x_k$  - є наявності сильний кореляційний зв'язок. Чим вище значення  $R^2$ , тим тісніше зв'язок в моделі між вихідний змінної (чинником) і вхідними змінними (чинниками), тим точніше, а отже, краще математична модель. Якщо модель має низьке значення  $R^2$ , то вона має низьку точність оцінки і прогнозу поведінки або властивостей об'єкту. Використовувати таку модель для дослідження, опису і прогнозу об'єкту не рекомендується. З декількох моделей для дослідження вибирається та, у якої відношення  $R^2$  має найбільше значення.

#### **6.4. Лінійні регресійні моделі з декількома вхідними змінними**

Якщо в результаті розрахунку відношення  $R^2$  множинна лінійна регресія визнана недостатньо точною, переходять до дослідження складніших моделей:

- *полінома з однією незалежною змінною*  $y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$  ;

- *полінома з декількома незалежними змінними*

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_2^2 + b_5x_1x_2;$$

- *зворотній моделі*

$$y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2} + \frac{b_3}{x_3} + \frac{b_4}{x_4} \quad ; \quad \text{або} \quad y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2} + \frac{b_3}{x_1} + \frac{b_4}{x_2^2} + \frac{b_4}{x_1 x_2} ;$$

- *комбінованій моделі*  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2\sqrt{x} + b_3\ln x + b_4\exp(x)$ .

Дослідник сам може запропонувати вид багатофакторної моделі на основі аналізу апріорної інформації. Оцінка коефіцієнтів регресії, критерію адекватності моделі і множинного коефіцієнта кореляції здійснюється по формулах (6.8), (6.9), (6.10), розглянутим раніше для «класичної» множинної регресії.

#### **6.5. Нелінійні регресійні моделі з декількома вхідними змінними**

Якщо в результаті побудови лінійних моделей жодна з них не була визнана достатньо точною, переходять до дослідження більш складних моделей. Будь-яку модель, в результаті перетворення записувану у вигляді (6.1), можна аналізувати методами лінійного регресійного аналізу.

Види перетворень для нелінійних моделей [12]:

- зворотне перетворення ;
- логарифмічне перетворення ;
- перетворення типу квадратного кореня.

Якщо за допомогою яких-небудь перетворень нелінійна модель може бути приведена до виду множинної лінійної регресії, то вона називається *нелінійною моделлю з «внутрішньою лінійністю»* [11]. До таких моделей відносяться:

- *степенева (мультиплікативна) модель*

$$y = b_0 \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot x_3^{b_3} \cdot \dots \cdot x_k^{b_k}.$$

Виконаємо перетворення:  $\ln y = \ln b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + \dots + b_k \ln x_k.$

Введемо перепозначення:  $\ln x_i = z_i, w = b_0^* + b_1 z_1 + b_2 z_2 + \dots + b_k z_k.$  Дана модель має вид багатofакторної лінійної регресії (див. формулу (6.1)), відповідно, *степенева* модель може бути перетворена логарифмуванням до виду багатofакторної лінійної регресії. Це дозволяє використати для розрахунку коефіцієнтів регресії, критерія адекватності та множинного коефіцієнта кореляції формули, розглянуті вище. Після розрахунків необхідно виконати потенціювання [11] і повернутися до вихідного степеневого виду моделі;

- *експоненціальна модель* ,  $y = \exp(b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots + b_k x_k).$

Логарифмування також дозволяє перетворити експоненціальну модель до виду багатofакторної лінійної моделі (формула 6.1) і використовувати для її дослідження апарат лінійного регресійного аналізу;

- *зворотня модель* ,  $y = \frac{1}{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k}.$

Виконаємо перетворення :  $\frac{1}{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k.$

Введемо перепозначення:  $\frac{1}{y} = w, w = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k.$

Отже, зворотна модель також може бути перетворена до виду множинної лінійної регресії, що дозволяє використовувати для її дослідження апарат лінійного регресійного аналізу.

Якщо за допомогою будь-яких перетворень нелінійна модель не може бути приведена до виду множинної лінійної регресії, то вона називається *нелінійною моделлю з «внутрішньою нелінійністю»*. Для дослідження цих моделей в математиці розроблений апарат нелінійного регресійного аналізу [12].

### **6.6. Крокові методи побудови регресійних моделей**

На практиці при дослідженні об'єктів і побудові регресійних моделей з декількома вхідними змінними використовують крокові (ітераційні) методи, що дозволяють обгрунтовано включати в модель тільки найбільш впливові і значущі вхідні чинники. Найчастіше застосовують *метод виключення змінних* і *метод включення змінних*.

*Метод виключення змінних* складається з декількох етапів [12]:

- Етап 1: пропонується регресійна модель, що включає всі досліджувані вхідні змінні.

- Етап 2: розраховується приватний  $F$ -критерій Фішера для кожної вхідної змінної  $F_{Xi}$  і оцінюється статистична значущість кожної вхідної змінної аналогічно тому, як це виконується для моделі в цілому.

- Етап 3: встановлюється вхідна змінна з мінімальним значенням  $F_{Xi}$ .

- Етап 4: мінімальне значення  $F$ -критерія порівнюється з граничним значенням.

Якщо  $F_{min} > F_{табл}(m, \alpha)$ , то відповідна вхідна змінна вважається статистично значущою і залишається в моделі. Отже, запропонована на етапі 1 модель статистично значуща, адекватна і може бути використана для дослідження об'єкту. Аналіз вхідних змінних, що залишилися, вже не проводиться. Далі розраховуються коефіцієнти регресії і множинний коефіцієнт кореляції.

Якщо  $F_{min} < F_{табл}$ , то відповідна вхідна змінна статистично незначуща і повинна бути видалена з моделі як неадекватна. Слід пам'ятати, що для багатофакторних моделей табличне значення  $F$ -критерія залежить ще і від числа вхідних змінних [9, 12].

- Етап 5: після видалення статистично незначущої вхідної змінної для вхідних змінних, що залишилися, знову перераховуються їх приватні  $F$ -критерії.

- Етап 6: знову встановлюється вхідна змінна (з тих, що залишилися) з мінімальним значенням  $F_{Xi}$ .

- Етап 7: етапи 4, 5, 6 повторюються до тих пір, поки в моделі не залишаться тільки статистично значущі змінні.

Якщо після виконання вказаних процедур в моделі не залишиться жодної статистично значущої змінної, то модель побудувати не можна. Швидше за все, причина в прорахунках, допущених при плануванні експерименту на основі аналізу апріорної інформації. В цьому випадку слід знову уважно проаналізувати апріорну інформацію, наново спланувати і провести експеримент і обробити його результати.

Якщо в моделі залишаються вхідні змінні, то переходять до розрахунку коефіцієнтів регресії і оцінки точності моделі.

*Метод включення змінних* також складається з етапів:

- Етап 0: у «моделі» немає жодної вхідної змінної.

- Етап 1: розраховується кореляційна матриця (з частних коефіцієнтів кореляції вхідних змінних один з одним і з вихідний змінної)

$$\begin{bmatrix} R_{1y} & R_{11} & R_{21} & R_{31} & \dots & R_{k1} \\ R_{2y} & R_{12} & R_{22} & R_{32} & \dots & R_{k2} \\ R_{3y} & R_{13} & R_{23} & R_{33} & \dots & R_{k3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{ky} & R_{1k} & R_{2k} & R_{3k} & \dots & R_{kk} \end{bmatrix},$$

где  $R_{ky}$  – частний коефіцієнт кореляції  $k$ -ї вхідної змінної і вихідний змінної.  $R_{ij}$

– частний коефіцієнт кореляції  $i$ -ї і  $j$ -ї вхідних змінних

$$(i = \overline{1, k}; j = \overline{1, k}; i \neq j).$$

• Етап 2: вибирається вхідна змінна з максимальним коефіцієнтом кореляції  $R_{iy}$ . Ця змінна першої вводиться в модель.

• Етап 3: визначається приватний  $F$ -критерій введеної вхідної змінної, який одночасно є критерієм адекватності всієї моделі.

Якщо  $F_{розр} < F_{табл}$ , то відповідна вхідна змінна статистично незначуща, тобто повинна бути видалена з моделі, а сама модель неадекватна. Вхідні змінні, що залишилися, мають з вихідною змінною ще менш тісний кореляційний зв'язок. Отже, в даній ситуації модель побудувати не представляється можливим.

Якщо  $F_{розр} > F_{табл}(m, \alpha)$ , то відповідна вхідна змінна вважається статистично значущою і залишається в моделі.

• Етап 4: кореляційна матриця перераховується без урахування впливу вибраної вхідної змінної.

• Етап 5: з вхідних змінних, що залишилися, вибирається змінна з максимальним коефіцієнтом кореляції  $R_{iy}$ . Ця змінна вводиться в модель наступної.

• Етап 6: визначається  $F$ -критерій нової моделі.

Якщо  $F_{розр} < F_{табл}$ , то знов введена в модель вхідна змінна статистично незначуща і повинна бути видалена з моделі як неадекватна. У моделі залишається одна вхідна змінна.

• Етап 7: процедури 4, 5, 6 повторюються до тих пір, поки не сформується остаточний вид моделі. Далі переходять до розрахунку коефіцієнтів регресії і оцінки точності моделі.

Порівнюючи дані методи, можна сказати наступне:

• Метод виключення вхідних змінних дає цілком задовільні результати при моделюванні.

• Метод включення вхідних змінних економічніший в обчислювальному аспекті.

### Питання для самоконтролю

1. Що таке багатофакторна лінійна регресія?
2. Як оцінюється точність багатофакторної лінійної регресійної моделі?
3. Як оцінюється адекватність багатофакторної лінійної регресійної моделі?
4. Які значення може приймати множинний коефіцієнт кореляції?
5. Що таке нелінійні моделі з «внутрішньою лінійністю»?
6. Які бувають нелінійні моделі з «внутрішньою лінійністю»?
7. Що таке нелінійні моделі з «внутрішньою нелінійністю»?
8. Позначте основні етапи методу включення змінних.
9. Що таке кореляційна матриця?
10. Що таке приватний критерій Фішера для вхідної змінної? Що він характеризує?

## Розділ 7. Інтерпретація і оптимізація регресійних моделей

### 7.1. Інтерпретація моделі

Після побудови регресійної моделі, оцінки її адекватності і точності, розрахунку коефіцієнтів регресії переходять до аналізу отриманих результатів. Цей етап називається *інтерпретацією*.

*Інтерпретація* – «переклад» результатів математичного опису досліджуваного об'єкту з мови математики на мову користувача (схеми, графіки, таблиці і т. д.).

На етапі інтерпретації оцінюється, наскільки результати (зокрема, модель) відповідають здоровому глузду і існуючій інформації про поведінку і властивості об'єкту. Інтерпретацію можна розглядати як етап, зворотний формалізації.

Позначимо основні кроки інтерпретації.

#### 1. Аналіз значень коефіцієнтів регресії

Технологічні процеси в машинобудуванні не відносяться ні до області мікросвіту, ні до області макросвіту. Якщо значення коефіцієнтів регресії підозріло великі або малі, то це може бути наслідком помилки в розрахунках. Слід виконати перевірку отриманих результатів.

#### 2. Аналіз знаків перед коефіцієнтами регресії

На цьому етапі встановлюється, якою мірою і як кожен вхідний чинник впливає на відгук об'єкту. Знаки коефіцієнтів регресії указують на характер впливу вхідних чинників на вихідний чинник. Порівнюючи результати моделювання і апріорну інформацію про об'єкт, можна зробити висновок про придатність отриманої моделі для опису, пояснення і прогнозу поведінки і властивостей об'єкту.

#### 3. Аналіз розрахункових значень вихідної змінної (виконується графічно)

На цьому етапі аналізується, наскільки значення вихідного чинника, передбачені по вибраній моделі, відрізняються від експериментальних даних. За наслідками порівняння також можна зробити висновок про придатність отриманої моделі для опису, пояснення і прогнозу поведінки і властивостей об'єкту.

Сучасне програмне забезпечення, яке застосовується для статистичного моделювання (STATISTICA, STATGRAPHICS, SPSS і ін.), дозволяє об'єднати вказані етапи і виконати інтерпретацію моделі графоаналітичним способом, тобто використовуючи широкі можливості побудови графіків і поверхонь відгуку.

### 7.2. Оптимізація моделі

Велика кількість завдань управління, планування і проектування пов'язана з проблемою оптимізації, що зводиться до відшукування таких значень вхідних чинників, при яких критерій оптимізації досягає екстремуму [13].

Можна виділити два основні підходи до рішення задачі оптимізації. Перший пов'язаний із створенням теорії процесу і його детермінованої (або аналітичною) моделі. В цьому випадку для вирішення завдання використовуються методи лінійного, нелінійного і динамічного програмування, принцип максимуму і так далі [13, 14, 15]. Другий підхід – емпіричний і в даний час використовується значно частішим. З'явилися і емпіричні способи оптимізації – метод Бокса-Уїлсона і симплекс-планування.

При рішенні задачі оптимізації необхідно вибрати метод пошуку оптимального рішення залежно від особливостей досліджуваного об'єкту і застосувати його для отримання «якнайкращих» характеристик або варіантів поведінки об'єкту або дії на нього. Якщо кількість вхідних чинників ( $k$ ) рівна або більше 2, то графічним відображенням результатів моделювання об'єкту є, відповідно, поверхня або гіперповерхня відгуку. Раніше ми вже говорили, що в цьому випадку вихідний чинник називається критерієм оптимізації.

Вирішуючи задачу пошуку екстремальних значень критерію оптимізації при побудові моделей, слід пам'ятати, що лінійні, статечні, експоненціальні, зворотні функції не мають екстремумів. Отже, регресійні моделі на їх основі теж не матимуть екстремумів. Тому в даному випадку як моделі для опису об'єкту доцільніше використовувати поліноми парних ступенів.

Бокс і Уїлсон запропонували кроковий метод дослідження поверхні відгуку – метод крутого сходження (або метод найшвидшого спуску) [13, 14, 15], в основі якого лежить використання *градієнта функції*. Рух по градієнту забезпечує найкоротший шлях до оптимуму і дає можливість в складній багатофакторній ситуації вести пошук цілеспрямовано.

Градiєнтом безперервної однозначної функції називається вектор

$$\text{grad}(y) = \frac{\partial y}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \vec{j} + \frac{\partial y}{\partial x_3} \vec{k} + \dots$$

Градiєнт завжди направлений у бік збільшення функції. Отже, якщо переміщатися по градієнту, то можна досягти максимуму функції відгуку, а якщо рухатися в напрямі, протилежному градієнту, то мінімуму [13]. Сучасне програмне забезпечення, яке використовується для статистичного моделювання (STATISTICA, STATGRAPHICS і ін.), дозволяє дослідникові уникнути численних обчислювальних процедур, оскільки дає можливість графічно відображати результати пошуку екстремумів функції.

Якщо поставлену оптимізаційну задачу не вдалося вирішити, то, швидше за все, слід перенести область проведення експерименту, спланувати і провести експеримент наново, побудувати нові регресійні моделі і спробувати визначити наявність екстремумів (можливо, локальних) критерію оптимізації і відповідних ним значень вхідних чинників.

### Питання для самоконтролю

1. Що таке інтерпретація моделі?
2. Для чого виконується інтерпретація моделі?
3. Позначте етапи інтерпретації моделі.
4. Що таке градієнт функції?
5. Чому при відшуканні максимуму критерію оптимізації можна



переміщатися по градієнту?

Що робити, якщо не вдалося вирішити задачу оптимізації для досліджуваного об'єкту?

### **Висновок**

Нами були розглянуті основи теорії моделювання, планування експерименту і побудови регресійних моделей для дослідження технологічних процесів машинобудівного виробництва.

Необхідність використання моделей і моделювання, перш за все математичних, визначається можливістю з їх допомогою вирішення складних завдань дослідження, прогнозування і оптимізації технологічних процесів в машинобудуванні. В даний час для інтенсивнішого використання математичних моделей є науково-методичні, інформаційні, програмно-технічні і соціальні передумови [1]. Створене для фахівців математичне і програмне забезпечення зробило моделювання широко використовуваним професійним інструментом для вирішення складних завдань оптимального технологічного проектування.